Die Rolle des ageostrophischen Windes bei quasigeostrophischer Strömung

Für Strömungen, bei denen die Rossbyzahl Ro klein ist, bietet sich eine asymptotische Reihenentwicklung mit der Rossbyzahl Ro als Entwicklungsparameter an:

$$\begin{aligned} u &= u_g + Ro^1 u_a + Ro^2 u_{(2)} + \dots \ , && (1)\\ v &= v_g + Ro^1 v_a + Ro^2 v_{(2)} + \dots \ , && (2)\\ h &= H + h_g + Ro^1 h_a + Ro^2 h_{(2)} + \dots \ . && (3) \end{aligned}$$

Die Größen u, v und h beschreiben dabei die Abweichung der Strömung von einem Referenzzustand der Ruhe mit der konstanten Wasserhöhe H. Auf der β-Ebene erhält man in nullter Ordnung $\mathcal{O}(Ro^0)$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} -f_0 v_g &= -g h_{gx} \ , && (4)\\ f_0 u_g &= -g h_{gy} \ , && (5)\\ u_{gx} + v_{gy} &= 0 \ , && (6) \end{aligned}$$

und in erster Ordnung $\mathcal{O}(Ro^1)$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} D_g u_g - f_0 v_a - \beta y v_g &= -g h_{ax} \ , && (7)\\ D_g v_g + f_0 u_a + \beta y u_g &= -g h_{ay} \ , && (8)\\ D_g h_g + H(u_{ax} + v_{ay}) &= 0 \ . && (9) \end{aligned}$$

Der Wind in nullter Ordnung, (u_g, v_g) heißt geostropischer Wind, der Wind in erster Ordnung, (u_a, v_a) heißt ageostrophischer Wind. Höhere Ordnungen werden in der Regel nicht betrachtet. Ferner ist $f = f_0 + \beta y$ und $D_g = \partial/\partial t + u_g \partial/\partial x + v_g \partial/\partial y$ die materielle Ableitung bei Advektion mit dem geostrophischen Wind.

Die Gleichungen (4) bis (9) sind sechs Gleichungen für die sechs gesuchten Funktionen $u_g(x,y,t), v_g(x,y,t), h_g(x,y,t), u_a(x,y,t), v_a(x,y,t)$ und $h_a(x,y,t)$. Die ersten drei Gleichungen (4) bis (6) beschreiben geostrophische Balance. Sie sind ein abgeschlossenes Gleichungssystem für $u_g(x,y,t), v_g(x,y,t)$ und $h_g(x,y,t)$, sind jedoch entartet in dem Sinne, daß sie beliebig viele Lösungen zulassen ohne Information über deren zeitliche Entwicklung zu liefern. Erst durch Verwendung der Gleichungen (7) bis (9) erhält man Information über die zeitliche Entwicklung von $u_g(x,y,t), v_g(x,y,t)$ und $h_g(x,y,t)$. Allerdings treten in den letzteren Gleichungen auch die ageostrophischen Komponenten $u_a(x,y,t), v_a(x,y,t)$ und $h_a(x,y,t)$ auf. Man ist im Prizinip jedoch nur an der Zeitentwicklung der geostrophischen Komponenten interessiert. Die ageostrophischen Komponenten eliminiert man, indem man $\partial(8)/\partial x - \partial(7)/\partial y$ bildet und außerdem (9) berücksichtigt. Das führt zu

$$D_g \Pi_g = 0 \ , \qquad (10)$$

was bedeutet, daß die Flachwasser-Version der quasigeostrophischen potentiellen Vorticity,

$$\Pi_g = f + v_{gx} - u_{gy} - f_0 \frac{h}{H} \equiv f + \zeta_g - f_0 \frac{h}{H} \ , \qquad (11)$$

materiell erhalten ist, wenn man dem geostrophischen Wind folgt. In der Definition von Π_g ist $h = H + h_g$ die tatsächliche Höhe der Flachwasserschicht in geostrophischer Näherung.

Wegen der Divergenzfreiheit des geostrophischen Windes kann man genau wie im barotropen Fall eine Stromfunktion einführen

$$(u_g, v_g) = (-\psi_y, \psi_x) \ . \tag{12}$$

Vergleich dieser Definition mit (4) und (5) erlaubt die Identifizierung

$$\psi(x, y, t) = \frac{g}{f_0} h(x, y, t) \ , \tag{13}$$

d.h. die geostrophische Komponente der Wasserhöhe spielt die Rolle der Stromfunktion. Beachte, daß (13) eine Balancegleichung ist, welche Strömung (ψ) und Massenverteilung (h) in Verbindung setzt. Verwendet man die Stromfunktion, so läßt sich (11) zu

$$\Pi_g = f + (\nabla_h^2 - L^{-2})\psi \tag{14}$$

umformulieren (mit $L^2 = gH/f_0^2$).

Obiges entält alle notwendigen Elemente des PV-Denkens. Die Größe Π_g ist ein Skalar, welcher im Sinne von (10) materiell erhalten ist (d.h. welcher nur durch Advektion durch den geostrophischen Wind verändert wird). Ferner kann man wegen (14) durch Inversion aus Π_g die Stromfunktion und damit den geostrophischen Wind erhalten. Zu dieser Inversion ist die elliptische partielle Differentialgleichung

$$(\nabla_h^2 - L^{-2})\psi = \Pi_g - f \tag{15}$$

zu lösen. Diese Gleichung ähnelt stark der entsprechenden Gleichung $\nabla_h^2\psi = \zeta_a - f$ vom barotropen Fall, weshalb man hier auch von äquivalent-barotroper Dynamik spricht. Die pseudo-potentielle Vorticity Π_g spielt im äquivalent-barotropen Modell die Rolle der PV im allgemeinen Sinne. Weil sie nur bei Advektion mit dem geostrophischen Wind (u_g, v_g), nicht aber bei Advektion mit dem vollen Wind (u, v) erhalten ist, nennt man sie pseudopotentielle PV.

Als nächstes wird der ageostrophische Wind näher betrachtet. Wiederum hat man in (7) bis (9) nur ein entartetes Gleichungssystem für u_a, v_a und h_a vorliegen, und man müßte eigentlich zur nächst höheren Ordnung in *Ro* gehen, um diese Entartung aufzuheben. Ist man jedoch nur an der Wirkung des ageostrophischen Anteils auf den geostrophischen Anteil interessiert, so kann man sich den Rekurs zur höheren Ordnung ersparen. Zur Berechnung der zeitlichen Änderung der geostrophischen Vorticity $\zeta_g = v_{gx} - u_{gy} = \nabla_h^2\psi$,

$$D_g\zeta_g = -\beta v_g + \frac{f_0}{H} D_g h_g = -\beta v_g - f_0(u_{ax} + v_{ay}) \ , \tag{16}$$

— und damit zur Berechnung der Veränderung des geostrophischen Windes — ist lediglich die Divergenz des agostrophischen Windes erforderlich. Man kann daher eine beliebige Geschwindikeit $(\chi_y, -\chi_x)$ (mit beliebigem Skalar χ) zu (u_a, v_a) addieren, ohne die Divergenz von (u_a, v_a) zu verändern. Insbesondere kann man $\chi = f_0^{-1} g h_a$ wählen, was gleichbedeutend damit ist, daß man diese Vieldeutigkeit nutzen kann, um ohne Beschränkung der Allgemeinheit $h_a = 0$ zu setzen. Der so festgelegte ageostrophische Wind ergibt sich dann aus (8) und (7) zu

$$f_0 u_a = -D_g v_g - \beta y u_g \ , \tag{17}$$

$$f_0 v_a = +D_g u_g - \beta y v_g \ . \tag{18}$$