Materielle Erhaltung und Inversion der Potentiellen Vorticity im Flachwassersystem mit Orographie

Die reibungsfreien Flachwassergleichungen auf der β-Ebene lauten in kartesischen Koordinaten

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -gh_x \ , \tag{1}$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = -gh_y \ , \tag{2}$$

$$\frac{DH}{Dt} + H(u_x + v_y) = 0 \ . \tag{3}$$

Hierbei ist $\mathbf{v} = (u, v)$ der Horizontalwind,

$$f(y) = f_0 + \beta y \tag{4}$$

der Coriolisparameter, g die Erdbeschleunigung, h die Lage des Oberrands der Flachwasserschicht,

$$H = h - h_b \tag{5}$$

die Dicke der Flachwasserschicht und h_b die Orographie (d.h. die Lage des unteren Rands der Flachwasserschicht). Abbildung dient zur Verdeutlichung. Ferner ist

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} \tag{6}$$

die materielle Ableitung. Eine Koordinate als Subindex bezeichnet die partielle Ableitung nach dieser Koodinate. Die Orographie wird als bekannt angenommen. Setzt man (5) in (3) ein, so reduziert sich (1) – (3) zu einem Gleichungssystem mit drei unabhängigen Variablen, nämlich $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ und $h(x, y, t)$. Im Gegensatz zu den Gleichungen für rein zweidimensionale Strömungen hat man hier drei prognostische Gleichungen für die drei gesuchten Größen $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ und $h(x, y, t)$. Die (konstante) mittlere Schichtdicke wird mit $\bar{H}$ bezeichnet.

Bildet man $\partial(2)/\partial x - \partial(1)/\partial y$, so ergibt sich zunächst

$$\frac{D}{Dt}(v_x - u_y) + fu_x + \beta v + fv_y + (\mathbf{v}_x \cdot \nabla)v - (\mathbf{v}_y \cdot \nabla)u = 0 \ . \tag{7}$$

Mit $\beta v = Df/Dt$ und $(\mathbf{v}_x \cdot \nabla)v - (\mathbf{v}_y \cdot \nabla)u = \zeta \nabla \cdot \mathbf{v}$ erhält man die Flachwasser-Vorticitygleichung

$$\frac{D\zeta_a}{Dt} + \zeta_a \nabla_h \cdot \mathbf{v} = 0 \ , \tag{8}$$

wobei $\zeta_a = f + \zeta = f + v_x - u_y$ die absolute Vorticity und $\zeta = v_x - u_y$ die relative Vorticity bezeichnet. Zusammen mit (3) liefert das

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\zeta_a}{H}\right) = 0 \ . \tag{9}$$

Die potentielle Vorticity des Flachwassersystems — abgekürzt: Flachwasser-PV – die durch

$$\boxed{Q = \frac{\zeta_a}{H} \equiv \frac{f + \zeta}{H} \equiv \frac{f + v_x - u_y}{h - h_b}} \ , \tag{10}$$

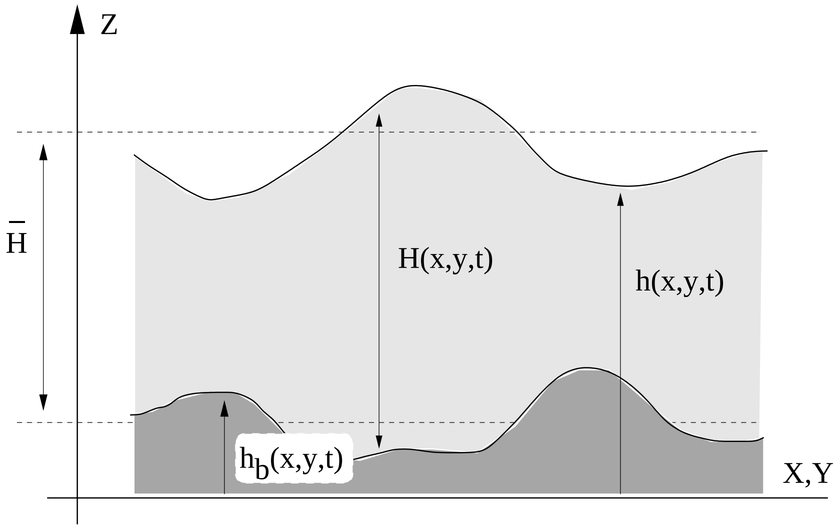

Abbildung 1: *Flachwasserschicht mit Orographie*

definiert wird, ist also ein materiell erhaltener Skalar, d.h.

$$\boxed{\frac{DQ}{Dt} = 0} . \tag{11}$$

Die Flachwasser-PV hängt von u, v und h ab, symbolisch geschrieben

$$Q = Q[u, v, h] . \tag{12}$$

Es liegt *keine Invertierbarkeit* vor, das heißt, aus der Kenntnis von Q alleine kann man *nicht* auf die Strömung zurückschließen. Es ist vielmehr möglich, daß unterschiedliche Strömungszustände die gleiche PV-Verteilung liefern. Beispielsweise läßt sich zeigen, daß die PV bezüglich der Klasse der Schwerewellen "blind" ist.

Um Invertierbarkeit zu erhalten, muß eine zusätzliche Zwangsbedingung, nämlich die *Balancebedingung* eingeführt werden. Diese wird im allgemeinen nur näherungsweise erfüllt sein. Es gibt praktisch beliebig viele Balancebedingungen, welche sich in Genauigkeit und Komplexität der mathematischen Beschreibung unterscheiden. An dieser Stelle wird nur die sehr einfache geostrophische Balance betrachtet. Der Horizontalwind wird dabei durch den geostrophischen Wind $\mathbf{v}_g = (u_g, v_g)$ angenähert,

$$\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_g , \tag{13}$$

welcher seinerseits durch

$$-f_0 v_g = -g h_x , \tag{14}$$

$$+f_0 u_g = -g h_y , \tag{15}$$

definiert ist. (Beachte, daß in dieser Definition das konstante f_0, nicht das f auftaucht!) Aus dieser Definition folgt, daß der geostrophsiche Wind divergenzfrei ist:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_g = 0 . \tag{16}$$

Er läßt sich damit als

$$(u_g, v_g) = (-\psi_y, \psi_x) . \tag{17}$$

darstellen, wobei die Stromfunktion ψ durch

$$\psi = \frac{g}{f_0}(h - \bar{H}) \tag{18}$$

gegeben ist. (Zur Erinnerung: $\bar{H}$ bezeichnet die konstante mittlere Dicke der Wasserschicht.) Kennt man ψ, so kennt man auch $\mathbf{v}_g$ und h:

$$\psi \longrightarrow (u_g, v_g, h) = (-\psi_y, \psi_x, \bar{H} + f_0\psi/g) \; . \tag{19}$$

In quasigeostrophischer Näherung weicht die tatsächliche Dicke H der Wasserschicht nur geringfügig von der mittleren Dicke $\bar{H}$ ab, es gilt sogar $|h'| \ll \bar{H}$ mit $h' = h - \bar{H}$, sowie $|h_b| \ll \bar{H}$. Daraus folgt

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{\bar{H} + h' - h_b} \approx \frac{1 - h'/\bar{H} + h_b/\bar{H}}{\bar{H}} \; . \tag{20}$$

Ferner ist $|\zeta_g| \ll f$ mit

$$\zeta_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \tag{21}$$

und $|\beta y| \ll |f_0|$. Ersetzt man nun in der Definition von Q den Horizontalwind durch den geostrophischen Wind und benutzt die obigen Näherungen, so folgt

$$Q \approx \frac{f + \zeta_g}{H} \approx \frac{f_0 + \beta y + \zeta_g}{\bar{H}} \left(1 - \frac{h'}{\bar{H}} + \frac{h_B}{\bar{H}}\right) \approx \frac{1}{\bar{H}} \left[f + \zeta_g - \frac{f_0}{\bar{H}}(h' - h_b)\right] \tag{22}$$

oder

$$\bar{H}Q \approx Q_g \; , \tag{23}$$

wobei

$$\boxed{Q_g \equiv f + \zeta_g - \frac{f_0}{\bar{H}}(h' - h_b) \equiv f_0 + \beta y + \nabla^2\psi - \frac{1}{L_R^2}\psi + f_0\frac{h_b}{\bar{H}}} \tag{24}$$

die quasigeostrophische potentielle Vorticity und

$$L_R = \sqrt{\frac{g\bar{H}}{f_0^2}} \tag{25}$$

den Rossby'sche Deformationsradius bezeichnet.

Die Größes Q_g hängt nur noch von ψ ab, symbolisch

$$Q_g = Q_g[\psi] \; . \tag{26}$$

Man hat *Invertierbarkeit* erreicht. Durch Umformen von (24) ergibt sich

$$\boxed{\left(\nabla^2 - \frac{1}{L_R^2}\right)\psi = Q_g - f - f_0\frac{h_b}{\bar{H}} \; .} \tag{27}$$

Gleichung (27) ist eine elliptische partielle Differentialgleichung. Gibt man $Q_g(x,y)$ und geeignete Randbedingungen für ψ vor, so kann aus (27) die Stromfunktion ψ in der gesamten x-y-Ebene berechnet werden. Dies liefert die balancierte Strömung $\mathbf{v}_g$ sowie h in der ganzen Ebene. Das Inversionsproblem ist damit gelöst.

Ein geschlossenes Gleichungssystem für die balancierte Dynamik ist durch

$$\mathcal{L}\psi = Q_g - f - f_0 \frac{h_b}{\overline{H}} , \tag{28}$$

$$\frac{D_g Q_g}{Dt} = 0 , \tag{29}$$

gegeben, wobei $\mathcal{L} = \nabla^2 - L_R^{-2}$ und $D_g/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}_g \cdot \nabla$ ist. Dieses Gleichungssystem beschreibt die balancierte Dynamik nur näherungsweise, da erstens Q durch Q_g genähert wurde, und zweitens die Advektion (D_g/Dt) nur durch den geostrophischen, nicht durch den gesamten Wind erfolgt.

[File: shallow water pv orog.tex]