BAROTROPE VORTICITYGLEICHUNG

Ein numerischer Praktikumsversuch

von

Prof. Volkmar Wirth
(Universität Mainz)

Februar 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Das barotrope Modell **1**

2 Numerische Algorithmen **4**

2.1 Inversionsgleichung 4

2.2 Zeitschrittverfahren 5

3 Numerische Implementation und graphische Darstellung **6**

4 Numerische Experimente **7**

4.1 Anfängliche PV-Anomalie 7

4.2 Numerische Stabilität 9

4.3 Barotrope Instabilität 10

4.4 Orographischer Antrieb und Rossbywellen 11

4.5 Thermischer Antrieb: Monsun 14

4.6 Thermisch getriebene Rossbywellen 16

1 Das barotrope Modell

Wir betrachten einen rechteckigen periodischen Kanal, der sich in x-Richtung (West-Ost-Richtung) von $-L_x/2$ bis $L_x/2$ erstreckt und in y-Richtung (Nord-Süd-Richtung) von $-L_y/2$ bis $L_y/2$. Im Norden und Süden sind Wände, sodass dort $v = 0$ gilt. In x-Richtung sind periodische Randbedingungen vorgegeben.

Wir benutzen das barotrope Modell, in dessen Rahmen der Horizontalwind $\mathbf{v} = (u, v)$ divergenzfrei ist. Entsprechend kann $\mathbf{v}$ über eine Stromfunktion als $(u, v) = (-\partial_y\psi, \partial_x\psi)$ oder

$$\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla\psi \tag{1}$$

formuliert werden. Die relative Vorticity is definiert als

$$\zeta := \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{v} = \partial_x v - \partial_y u \; . \tag{2}$$

Drückt man dies über die Stromfunktion aus, so erhält man

$$\zeta = \nabla^2\psi \; . \tag{3}$$

Die absolute Vorticity ist

$$q := f + \zeta \tag{4}$$

wobei der Coriolisparameter f linear von y abhängen darf: $f = f_0 + \beta(y - y_0)$, mit $f_0 = const$ und $\beta = const$. Dies ist die sogenannte β-Ebene.

Die Gleichung, welche die Dynamik bestimmt, lautet

$$\boxed{\frac{Dq}{Dt} = 0} \; , \tag{5}$$

mit der materiellen Ableitung $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$. Gleichung (5) beschreibt die materielle Erhaltung der absoluten Vorticity. Alternativ lautet sie

$$\frac{D\zeta}{Dt} + \beta v = 0 \; . \tag{6}$$

Um (5) zu integrieren, benötigt man bei jedem Zeitschritt den aktuellen Wind. Den erhält man durch Lösen der folgenden elliptischen partiellen Differentialgleichung

$$\boxed{\nabla^2\psi = q - f \equiv \zeta} \; , \tag{7}$$

was eine Umformulierung von (4) bzw. (3) ist. Die beiden Gleichungen (5) und (7) bilden zusammen mit (1) ein geschlossenes Gleichungssystem.

Die Modellgleichung (5) kann in Flussform wie folgt geschrieben werden,

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{v}q) \; , \tag{8}$$

wobei hier die Divergenzfreiheit des Horizontalwindes ausgenutzt wurde. Integration über das gesamte Modellgebiet G, Verwendung des Satzes von Gauss und Berücksichtigung der Randbedingungen liefert

$$\frac{d}{dt}\int_G q \, dxdy = 0 \; . \tag{9}$$

Das bedeutet, dass die Gesamt-PV (d.h. gebietsintegrierte PV) zeitlich konstant ist. Dieses Ergebnis folgt notwendigerweise aus der materiellen Erhaltung der PV. Wenn bereits jedes Flüssigkeitselement für sich betrachtet die PV erhält, dann muss erst recht die Gesamt-PV erhalten sein. Die Umkehrung des letzten Satzes gilt nicht. Materielle Erhaltung ist in gewissem Sinne unendlich viel mehr wert als die Erhaltung der gebietsintegrierten Größe.

Lösungsstrategie

1. Wir beginnen mit einem Anfangszustand, der über die anfängliche räumliche Verteilung von $q(x,y)$ oder $\zeta(x,y)$ festgelegt ist.

2. Durch Inversion von (7) oder (3) wird daraus ψ und via (1) der Horizontalwind $\mathbf{v}$ bestimmt.

3. Die zu integrierende Modellgleichung ist (5) oder (alternativ) (6). In Flussform lassen sich diese Gleichungen wie folgt schreiben
$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\mathbf{v}\cdot\nabla q \equiv -\nabla\cdot(\mathbf{v}q)\ . \tag{10}$$
bzw.
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\mathbf{v}\cdot\nabla\zeta - \beta v \equiv -\nabla\cdot(\mathbf{v}\zeta) - \beta v\ . \tag{11}$$
Der jeweils letzte Schritt gilt wegen der Divergenzfreiheit des Horizontalwindes.

4. Die zeitliche Diskretisierung der letzten Gleichung erlaubt es, aus den bisher bekannten Zuständen den naechsten (d.h. um das Inkrement Δt späteren) Zustand zu errechnen. Im Fall des hier verwendeten Bocksprungverfahrens erhält man:
$$\frac{\zeta_{i+1}-\zeta_{i-1}}{2\Delta t} = \mathrm{RHS}_i \qquad \text{oder} \qquad \zeta_{i+1} = \zeta_{i-1} + 2\Delta t\,\mathrm{RHS}_i\ , \tag{12}$$
wobei RHS die rechte Seite von (11) bezeichnet und der Index den Zeitschritt nummeriert.

5. Nun zurück zu Schritt 2 für diesen neuen Zustand und solange wiederholen wie erwünscht.

Randbedingungen

Die der barotropen Wirbelgleichung zugrunde liegende Gleichung für den Implus in x-Richtung lautet
$$\frac{Du}{Dt} - fv = -g\frac{\partial h}{\partial x}\ . \tag{13}$$
Mittelung in x-Richtung (bezeichnet durch einen Querstrich) liefert
$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \overline{vu_y}\ . \tag{14}$$
Integration über das gesamte Gebiet liefert
$$\int\!\!\int u(x,y,t)\,dxdy = const\ . \tag{15}$$
Da am nördlichen und südlichen Rand $v = 0$ gelten soll, muss dort die Stromfunktion zu jedem Zeitpunkt jeweils einen konstanten Wert (ψ_N und ψ_S) haben. Obige Beziehung zeigt, dass
$$\psi_N - \psi_S = const\ , \tag{16}$$
d.h. zeitlich konstant sein muss. Da die Stromfunktion ohnehin nur bis auf eine Konstante festgelegt ist, folgt daraus, dass sowohl ψ_N als auch ψ_S als feste Konstante betrachtet werden können, die durch die Anfangsbedingungen vorgegeben sind. Setzt man o.B.d.A. $\psi_S = 0$, so ist
$$\psi_N = -u_0 L_y\ , \tag{17}$$
wobei u_0 dem mittleren (konstanten!) Zonalwind entspricht.

Anregung durch Orographie und Dämpfung

Die Modellgleichung kann erweitert werden, um sowohl Anregung durch eine Orographie als auch gleichzeitig Dämpfung zu berücksichtigen:

$$\frac{Dq}{Dt} = -\frac{f_0}{D}\mathbf{v} \cdot \nabla h_b - \alpha(q - q_{\mathrm{ref}}) \ . \tag{18}$$

Hierbei ist α eine Dämpfungsrate, q_{ref} ist eine geeignete Referenzverteilung der PV (z.B. das zonale Mittel), $h_b(x, y)$ bezeichnet die Orographie und D ist eine konstante Höhe. Im Allgemeinen sind jetzt die gesamte kinetische Energie und die gesamte Vorticity nicht mehr erhaltene Größen.

Streng genommen ist es heikel, im barotropen Modell überhaupt einen Berg einzuführen. Vorsichtige Leute sprechen daher lieber von einem "quasi-orographischen Antrieb" (z.B. Juckes and McIntyre (1987)). Definiert man

$$F := f_0 \frac{h_b}{D} \tag{19}$$

und beachtet man, dass h_b nicht von der Zeit abhängt, so kann man (18) auch wie folgt schreiben:

$$\frac{D(q + F)}{Dt} = -\alpha(q - q_{\mathrm{ref}}) \ . \tag{20}$$

Im dämpfungsfreien Fall ist also $q + F$ materiell erhalten.

Beachte ferner, dass der orographische Antriebsterm wie folgt umgeschrieben werden kann:

$$-\frac{f_0}{D}\mathbf{v} \cdot \nabla h_b \equiv -\mathbf{v} \cdot \nabla F \stackrel{!}{=} -\nabla \cdot (\mathbf{v}F) \ . \tag{21}$$

Daraus folgt unmittelbar, dass der orographische Antrieb die Gesamt-PV invariant lässt (warum?).

Thermischer Antrieb

Das barotrope Modell enthält keine thermodynamischen Variablen. Daher erscheint es auf den ersten Blick nicht möglich, thermische Antriebe (wie Heizung oder Kühlung) überhaupt zu repräsentieren. Allerdings gibt es ein Vehikel, wie es in gewissem Sinne doch geht.

Und zwar so. Im Rahmen des barotropen Modell kann man sich eine Massenquelle vorstellen. Hätte man eine Gleichug für die Höhe der freien Oberfläche, so könnte man diese um einen Term Q erweitern,

$$\frac{Dh}{Dt} = \ldots + Q \ , \tag{22}$$

wobei Q die Veränderung der Höhe der Oberfläche durch die eingefügte zusätzliche Masse darstellt. Im Rahmen des quasi-geostrophischen Flachwassermodells entspräche eine Erhöhung von h eine Erniedrigung der PV gemäß $-f_0 Q/D$, wobei D eine konstante Referenzhöhe bezeichnet. Wir setzen analog für das barotrope Modell:

$$\frac{Dq}{Dt} = S \equiv -\frac{f_0}{D} Q \ . \tag{23}$$

Der Term S beschreibt faktisch die Wirkung einer Wärmequelle auf die PV im barotropen Modell.

Im Gegensatz zum orographischen Antrieb wird der thermische Antrieb im Allgemeinen die Gesamt-PV verändern, d.h.

$$\frac{d}{dt}\int q\,dxdy \neq 0 \quad \text{falls} \quad Q \neq 0\ . \tag{24}$$

Will man einen statistisch stationären Zustand erhalten, so ist es unabdingbar, auch einen Dissipationsterm einzubauen. Unsere Modellgleichung lautet insgesamt also

$$\frac{Dq}{Dt} = -f_0\frac{Q}{D} - \alpha(q - q_{\mathrm{ref}})\ . \tag{25}$$

Streng genommen kann man Heizung und Kühlung nur in einem Modell mit echter Vertikalstruktur richtig beschreiben. Das einfachste solche Modell ist das Zweischichtenmodell. Die Reaktion der Strömung in der oberen Schicht des Zweischichtenmodells auf Heizung ist qualitativ ähnlich wie die Reaktion der Strömung im barotropen Modell auf den Heizungsterm gemäß (25).

2 Numerische Algorithmen

Einen guten Überblick über die numerische Behandlung findet man in Kapitel 13.3 und 13.4 des Lehrbuchs von Holton (2004). Unser MatLab Code ist eine Modifikation des Codes der Aufgabe M13.7 aus diesem Buch.

2.1 Inversionsgleichung

Die Inversionsgleichung (7) wird wie folgt gelöst. Zunächst werden sowohl ψ als auch ζ als Fourierreihe hinsichtlich der x-Richtung geschrieben. Dies ist sinnvoll, da die x-Richtung nach Annahme periodisch sein soll! Wir schreiben also:

$$\psi(x,y) = \sum_{s=0}^{\infty} f^{(s)}(y)\, e^{2\pi i s x/L_x} \tag{26}$$

und

$$\zeta(x,y) = \sum_{s=0}^{\infty} g^{(s)}(y)\, e^{2\pi i s x/L_x}\ . \tag{27}$$

Damit lautet die Inversionsgleichung

$$\sum_{s=0}^{\infty}\left[\frac{df^{(s)}(y)}{dy^2}\, e^{2\pi i s x/L_x} - f^{(s)}(y)\left(\frac{2\pi}{L_x}\right)^2 s^2\, e^{2\pi i s x/L_x}\right] = \sum_{s=0}^{\infty} g^{(s)}(y)\, e^{2\pi i s x/L_x}\ . \tag{28}$$

Diese Gleichung ist nur erfüllt, wenn sie für jeden einzelnen Summanden erfüllt ist, also (nach Division durch $e^{2\pi i s x/L_x}$)

$$\frac{df^{(s)}(y)}{dy^2} - \left(\frac{2\pi}{L_x}\right)^2 s^2 f^{(s)}(y) = g^{(s)}(y)\ . \tag{29}$$

Letzteres ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für $f^{(s)}(y)$.

Wir lösen diese Gleichung numerisch für die Randbedingungen $f(-L_y/2) = f(L_y/2) = 0$. Diese Randbegingungen sind mit der Bedingung $v = 0$ bei $y = \pm L_y/2$ kompatibel. Finite

Differenzen führen für jeden Wert von s auf eine Matrixgleichung, die halb symbolisch wie folgt geschrieben werden kann.

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 1 & -\left[2+\left(\frac{2\pi}{L_x}\Delta y\right)^2 s^2\right] & 1 \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{K-1} \end{pmatrix} = (\Delta y)^2 \begin{pmatrix} g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{K-1} \end{pmatrix} . \tag{30}$$

Dabei ist K die Anzahl der Gitterpunkte in y-Richtung, und der Subindex bei f und g bezeichnet die diskretisierte Position in y-Richtung. Die Dirichlet-Randbedingungen wurden bereits berücksichtigt, sodass die tridiagonale Matrix nur die Dimension $(K-2)\times(K-2)$ besitzt.

Lösungsstrategie für die Inversionsgleichung

Die zu lösende Aufgabe lautet: $\zeta(x,y)$ ist gegeben, gesucht ist $\psi(x,y)$.

1. Mache für jeden Gitterpunkt in y eine Fourierreihenentwicklung von $\zeta(x,y)$ in x-Richtung. Dies liefert die $g^{(s)}(y)$ (mit $s=0,1,\dots N_x-1$, wobei N_x die Anzahl der Gitterpunkte in x-Richtung ist).
2. Invertiere numerisch die Gleichung (30). Dies liefert die $f^{(s)}(y)$.
3. Setze diese $f^{(s)}(y)$ in (26) ein, um damit $\psi(x,y)$ zu bestimmen.

Randbedingungen

So, wie die Lösung bisher aussieht, erfüllt sie $\psi = 0$ am nördlichen und südlichen Rand. Allerdings wollen wir $\psi(x, L_y/2) = \psi_N$ und $\psi(x, -L_y/2) = \psi_S$ erzwingen. Dies wird erreicht, indem zu der bisher berechneten Lösung $\psi(x,y)$ noch ein linearer Anteil

$$\psi_{\text{lin}}(y) = \psi_S + \left(\frac{y}{L_Y} + \frac{1}{2}\right)(\psi_N - \psi_S) \tag{31}$$

addiert wird. Beachte, dass $\nabla^2\psi_{\text{lin}} = 0$ gilt, d.h. dieser lineare Anteil ψ_{lin} ist "unsichtbar" in der Inversionsgleichung (7). Für $\psi_S = 0$ und $\psi_N = -u_0 L_y$ liefert das

$$\psi_{\text{lin}} = -(y + L_y/2)u_0 \tag{32}$$

2.2 Zeitschrittverfahren

Die eigentliche Modellgleichung ist (5). Diese wird unter Beachtung der Divergenzfreiheit des Horizontalwindes wie folgt umgeschrieben

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\nabla\cdot(\mathbf{v}q) , \tag{33}$$

bzw.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\mathbf{v}\cdot\nabla\zeta - \beta v \equiv -\nabla\cdot(\mathbf{v}\zeta) - \beta v . \tag{34}$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist nun (minus) die Divergenz eines Flusses (der Fluss ist $\mathbf{v}q$ bzw. $\mathbf{v}\zeta$).

Formal kann man die letzte Gleichung als

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -F(x, y, t) \tag{35}$$

schreiben mit $F(x, y, t) = \nabla \cdot (\zeta \mathbf{v}) + \beta v$. Die räumliche Diskretisierung von F wird mit $F_{m,n}$ bezeichnet, wobei m der Index für die x-Richtung und n der Index für die y-Richtung ist. Es gibt viele Möglichkeiten, den Ausdruck für F zu diskretisieren. Wir verwenden hier

$$\begin{aligned} F_{m,n} &= \frac{1}{2\Delta} [(u_{m+1,n}\zeta_{m+1,n} - u_{m-1,n}\zeta_{m-1,n}) \\ &\quad + (v_{m,n+1}\zeta_{m,n+1} - v_{m,n-1}\zeta_{m,n-1})] + \beta v_{m,n} \ , \end{aligned} \tag{36}$$

wobei $\Delta x = \Delta y =: \Delta$ angenommen wurde. Diese Diskretisierung ist eine gute Wahl, weil sie sowohl die mittlere kinetische Energie als auch die mittlere Enstrophie erhält (für weitere Details siehe Holton (2004)).

Als Zeitschrittverfahren verwenden wir das sogenannte Bocksprungverfahren:

$$\zeta_{i+1} = \zeta_{i-1} - 2\Delta t F_i \ , \tag{37}$$

wobei jetzt der Index i den Zeitindex bezeichnet. Bei ersten Zeitschritt und gelegentlich zwischendurch wird ein einfacher Euler-Vorwärts-Zeitschritt eingeschaltet, um den sogenannten "computational mode" zu eliminieren.

Das Bocksprung-Schema ist ein explizites Verfahren und erfordert einen kleinen (aber endlichen) Diffusionsterm zur numerischen Stabilität. Das bedeutet, dass wir numerisch statt Gleichung (6) die Gleichung

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{v}\zeta) - \beta v - A_{\text{diff}} \nabla^4 \zeta \tag{38}$$

lösen, wobei der Diffusionskoeffizient A_{diff} möglichst klein gewählt wird, aber groß genug, sodass das Verfahren numerisch stabil bleibt. Die vierte Potenz beim Nablaoperator im Dissipationsterm bedeutet, dass es sich hier nicht um eine "normale" Diffusion handelt.[1] Man spricht vielmehr von *Hyperdiffusion*. Der springende Punkt ist, dass Hyperdiffusion besonders stark die kleinsten Skalen dämpft, gleichzeitig aber die größeren Skalen weniger stark beeinflusst (warum?). Effektiv ist es damit einfacher, Strömung mit sehr großer Reynoldszahl zu simulieren (siehe z.B. McWilliams (1984) oder Babiano *et al.* (1987)).

3 Numerische Implementation und graphische Darstellung

Eine einfache Implementation des Modells in der Programmiersprache Python wird zur Verfügung gestellt. Ursprüngliche Grundlage dazu war das Programm `barotropic_model.m` aus Holton (2004) mit den dazugehörigen Unterprogrammen. Dieses wurde von Christopher Polster auf Python umgeschrieben und ist in der Datei `pv_baro_model.py` enthalten.

Sieh Dir zunächst den gesamten Programmcode an und vollziehe im Detail die einzelnen Schritte nach. Dieser Code soll Grundlage für die Projektaufgabe sein, es sind allerdings eine Reihe von Verbesserungen und Erweiterungen erforderlich oder zumindest willkommen. Zum Beispiel sollte die Gitterweite verkleinert werden; auch wäre es schön, die Routine `pcolormesh` durch `contourf` zu ersetzen.

[1] Beachte auch das Vorzeichen: Bei gewöhnlicher Diffusion würde der Term auf der rechten Seite lauten: $+A_{\text{diff}} \nabla^2 \zeta$, in (38) dagegen hat der Hyperdiffusionsterm ein negatives Vorzeichen. Warum?

4 Numerische Experimente

Im Folgenden kommen Vorschläge für numerische Experimente, die jeweils bestimmte theoretische Sachverhalte illustrieren. Diese Vorschläge sollen lediglich als Anregung dienen, und Du bist eingeladen, Dir weitere Experimente zu weiteren Fragestellungen auszudenken.

4.1 Anfängliche PV-Anomalie

Zunächst kommt eine Reihe von Experimenten, bei denen eine Anfangsanomalie vorgegeben wird, deren zeitliche Entwicklung verfolgt und verstanden werden soll. Als anfängliche Anomalie geben wir vor

$$\zeta(x,y) = A \exp\left[-2(k^2(x-x_m)^2 + m^2(y-y_m)^2)\right] \ , \tag{39}$$

wobei (x_m, y_m) die Mitte des Kanals bezeichnet, A die Amplitude ist und (k, m) der Vektor mit den Wellenzahlen für die x bzw. y-Richtung. Die Ausdehnung des Gebiets ist in diesem gesamten Unterabschnitt 4.1 wie folgt zu wählen: $L_x = 6000\,\mathrm{km}$ und $L_y = 3000\,\mathrm{km}$.

Monopol auf der f-Ebene

Wir starten mit einer näherungsweise kreisförmigen Anfangsanomalie auf der f-Ebene bei verschwindendem mittlerem Zonalwind (vgl. (15)):

f_0	β	u_0	A	k	m
$1\times10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$	$0\ \mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$	$0\,\mathrm{m\,s}^{-1}$	$1\times10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$	$2\pi/L_x$	π/L_y

Die zeitliche Entwicklung ist nicht sehr spannend, die Anomalie dreht im Wesentlichen in sich selbst. Wir haben es hier näherungsweise mit einem Monopol zu tun, der offensichtlich eine recht stabile Lösung des Systems darstellt. Hätten wir nicht einen Kanal, sondern eine unendlich ausgedehnte Ebene, so wäre eine anfangs kreissymmetrische Anomalie eine wirklich stationäre Lösung des Problems, d.h.

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\mathbf{v}\cdot\nabla q \stackrel{!}{=} 0 \ . \tag{40}$$

Das ist gleichbedeutend damit, dass der Wind überall parallel zu den Isolinien von q bläst. Aus Symmetriegründen muss dies so sein. Allerdings nicht, wenn man statt der unendlich ausgedehnten Ebene die Kanalgeometrie betrachtet (warum nicht)?

Gelegentlich kann man über dem Mittelmeer in der oberen Troposphäre eine zyklonale PV-Anomalie beobachten, die über viele Tage hinweg existiert und sich kaum von der Stelle bewegt. Solche Anomalien entsprechen in guter Näherung dem Monopol, der hier in idealisierter Form betrachtet wurde.

Dieses Experiment verdeutlicht auch, dass auf der Nordhemisphäre (d.h. $f_0 > 0$) eine positive PV-Anomalie mit einer Strömung gegen den Uhrzeigersinn verknüpft ist. Was passiert, wenn Du das Vorzeichen von f_0 umkehrst? Warum? Was passiert, wenn Du das Vorzeichen der anfänglichen ζ-Anomalie umkehrst? Warum?

“Vortex-Stripping”

Wir betrachten jetzt eine anfängliche Anomalie, welche nicht kreisförmig, sondern elliptisch ist. Es werden also k und m modifiziert, alles andere bleibt unverändert:

f_0	β	u_0	A	k	m
$1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$	$0\,\mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$	$0\,\mathrm{m\,s}^{-1}$	$1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$	$2\pi/(3L_x)$	$2\pi/L_y$

Die zeitliche Entwicklung zeigt eine klare Tendenz zur Axisymmetrisierung. Überschüssige PV wird in Form von Filamenten abgeworfen, und die verbleibende zentrale Anomalie nimmt eine näherungsweise axialsymmetrische Form an. Offenbar ist der Monopol von oben eine recht stabile Lösung, die auch bei nicht optimalen Anfangsbedingungen mit der Zeit näherungsweise angestrebt wird. Dieses Phänomen wurde im Detail von Melander *et al.* (1987), Legras and Dritschel (1993) und Mariotti *et al.* (1994) untersucht. Wenn man bessere räumliche Auflösung verwenden würde, würde man auch sehen, dass sich bei diesem Vorgang die Gradienten der PV verschärfen. Die von uns gewählte, recht niedrige Auflösung bewirkt allerdings, dass die explizite und implizite numerische Diffusion der Gradientenverstärkung signifikant entgegenwirkt.

Beta-Wirbel oder Beta-Drift

Kehre nun zu der nahezu kreisförmigen Anfangsanomalie zurück und schalte β ein.

f_0	β	u_0	A	k	m
$1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$	$1.6 \times 10^{-11}\,\mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$	$0\,\mathrm{m\,s}^{-1}$	$0.5 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$	$2\pi/L_x$	π/L_y

Die zeitliche Entwicklung zeigt, dass auch jetzt der Monopol erhalten bleibt. Allerdings erhält man eine Drift in nord-westliche Richtung! Diese Drift wird unter der Bezeichnung Beta-Wirbel (engl. “beta-gyres”) oder Beta-Drift gehandelt.

Hurrikane, die keiner ausgeprägten Umgebungsströmung ausgesetzt sind, bewegen sich in der Regel in eine nord-westliche Richtung. Der Grund sind im Wesentlichen die “beta-gyres”, und unser numerisches Experiment stellt die Situation in idealisierte Form dar.

Mache Dir klar im Rahmen des PV-Denkens, wie es zu dieser nord-westlichen Drift kommen kann. Ein hilfreicher Artikel zum Thema der Beta-Wirbel ist Sutyrin and Flierl (1994). Ein hervorragender Artikel zum Thema PV und zum PV-Denken allgemein ist Hoskins *et al.* (1985).

Dito mit Hintergrundsströmung

Jetzt kehren wir zur f-Ebene zurück und schalten wir eine nicht verschwindende Hintergrundsströmung u_0 ein:

f_0	β	u_0	A	k	m
$1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$	$0\,\mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$	$20\,\mathrm{m\,s}^{-1}$	$1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$	$2\pi/L_x$	π/L_y

Die zeitliche Entwicklung zeigt klar eine Verlagerung des Wirbels nach Osten. Dies ist im Wesentlichen der Advektion durch die Hintergrundsströmung geschuldet.

Das gleiche Experiment kann auf der β-Ebene wiederholt werden:

f_0	β	u_0	A	k	m
$1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$	$1.6 \times 10^{-11}\,\mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$	$20\,\mathrm{m\,s}^{-1}$	$1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$	$2\pi/L_x$	π/L_y

Auch in diesem Falle bewegt sich der Wirbel ostwärts, allderdings deutlich weniger stark. Außerdem driftet der Wirbel leicht nach Norden. Relativ zum vorigen Experiment hat man also eine Drift in Richtung Nord-West, und das ist hundertprozentig konsistent mit einer Überlagerung von Advektion durch u_0 plus einer Beta-Drift.

Rossbywellen

Bisher hatten wir recht starke Anomalien vorgegeben. Jetzt betrachten wir eine recht schwache (und etwas ausgedehntere) Anomalie auf der β-Ebene. Dies machen wir, weil wir hoffen, in diesem Falle lineare Theorie anwenden zu können und Rossbywellen zu identifizieren:

f_0	β	u_0	A	k	m
$1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$	$1.6 \times 10^{-11}\,\mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$	$20\,\mathrm{m\,s}^{-1}$	$0.1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$	π/L_x	π/L_y

Die zeitliche Entwicklung zeigt, dass sich die Anomalie nach Osten bewegt. Im Wesentlichen hat die Entwicklung den Anschein einer Rossbywelle. Betrachte die Dispersionsrelation für barotrope Rossbywellen,

$$c = u_0 - \frac{\beta}{k_x^2 + k_y^2} \tag{41}$$

wobei k_x und k_y die Wellenzahlen in x- und y-Richtung sind. Da es sich bei unserer Anomalie nicht um eine sinusförmige Welle handelt, müssen k_x und k_y grob geschätzt werden. Bestimme somit eine näherungsweise Phasengeschwindigkeit in x-Richtung. Zeige, dass dies in guter Näherung mit der Verschiebung im numerischen Experiment übereinstimmt. In jedem Fall sollte zu sehen sein, dass die ostwärtige Verschiebung der Anomalie *langsamer* ist als wenn sie einfach mit u_0 advehiert würde. Dies entspricht genau der Tatsache, dass Rossbywellen eine Phasenverschiegung *westwärts* relativ zum Grundstrom besitzen.

Welche Parameter können/müssen verändert werden, um retrograde Rossbywellen zu simulieren (versuche es!).

4.2 Numerische Stabilität

Wiederhole das folgende Experiment aus dem vorigen Abschnitt:

f_0	β	u_0	A	k	m
$1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$	$0\,\mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$	$20\,\mathrm{m\,s}^{-1}$	$1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$	$2\pi/L_x$	π/L_y

Erhöhe systematisch den Wert Δt des numerischen Zeitschritts. Wie groß muss Δt gewählt werden, dass das Verfahren numerisch instabil wird? Die numerische Instabilität ist in jedem Fall ganz offensichtlich, und nach kurzer Zeit sind die Variablen mit `NaN` statt mit Zahlenwerten belegt.

Bei den folgenden numerischen Experimenten lohnt es sich, zunächst einigermaßen systematisch auszuprobieren, wie groß maximal Δt gewählt werden kann. Ziel der Übung ist es, nicht einen unnötig kleinen Zeitschritt zu wählen, weil man dann unnötig lange auf das Ergebnis warten muss.

4.3 Barotrope Instabilität

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Phänomen der barotropen Instabilität. Als Anfangsprofil für den Zonalwind geben wir folgendes Profil vor:

$$u_{\mathrm{ini}}(y) = \hat{U}\ \tanh\left(\frac{y}{\Delta}\right)\ , \tag{42}$$

mit der Amplitude $\hat{U} = 20\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ und der Übergangsbreite $\Delta = L_y/6$. Die entsprechende Anfangs-Vorticity erhält man durch $\zeta = -du/dy$. Mache Dir klar, dass dieses Strömungsprofil die notwendige Bedingung für barotrope Instabilität gemäß dem Rayleigh-Kriterium (wie lautet dieses?) erfüllt.

Um eine (eventuelle) Instabilität anzuregen, wird dieser Vorticityverteilung noch eine kleine Anomalie der Wellenzahl 1 überlagert, d.h.

$$\zeta \longrightarrow \zeta + A_s \sin\left(2\pi\frac{x}{L_x}\right) e^{-2m^2y^2}\ . \tag{43}$$

Erster Versuch

Wir betrachten zunächst die f-Ebene, da barotrope Instabilität auch ohne β funktioniert (im Gegenteil: positives β hat eher einen stabilisierenden Einfluss — warum?):

L_x	L_y	m	f_0	β	u_0	$\hat{U}$	A_s
3000 km	3000 km	$2\pi/L_y$	$1\times10^{-4}\,\mathrm{s^{-1}}$	$0\ \mathrm{s^{-1}m^{-1}}$	$0\ \mathrm{m\,s^{-1}}$	$20\ \mathrm{m\,s^{-1}}$	$5\times10^{-6}\,\mathrm{s^{-1}}$

Die zeitliche Entwicklung zeigt, dass wir es offenbar mit einer stabilen Situation zu tun haben, denn die PV-Verteilung und die damit verbundene Strömung bleiben im Wesentlichen unverändert. Die Störstromfunktion wabert ein wenig hin und her, hat aber praktisch keine Phasenneigung in y-Richtung.

Dieses Experiment macht deutlich, dass das Rayleigh-Kriterium nur eine notwendige Bedingung für das Auftreten von Instabilität darstellt (was bedeutet das?).

Eine instabile Situation

Wie schaffen wir es, eine Situation mit barotroper Instabilität herzustellen? Wir verlängern unseren Kanal und benutzen jetzt:

L_x	L_y	m	f_0	β	u_0	$\hat{U}$	A_s
6000 km	3000 km	$2\pi/L_y$	$1\times10^{-4}\,\mathrm{s^{-1}}$	$0\ \mathrm{s^{-1}m^{-1}}$	$0\ \mathrm{m\,s^{-1}}$	$20\ \mathrm{m\,s^{-1}}$	$5\times10^{-6}\,\mathrm{s^{-1}}$

Nur erhalten wir eine ganz andere zeitliche Entwicklung, nämlich Instabilität. Während des ersten Tages wächst die Störung langsam an. Ab $t \approx 24$ hrs erhält die Störstromfunktion eine Phasenneigung gegen die Scherung, welche für den anwachsenden Mode charakteristisch ist. Nach $t \approx 72$ hrs ist die Welle so stark angewachsen, dass die Entwicklung in das nichtlineare Stadium gelangt. Dies kann man z.B. darin sehen, dass bei der Störstromfunktion die positive (antizyklonale) Anomalie eine größere Amplitude hat als die negative (zyklonale) Anomalie. Nach ca. 6 Tagen sind wir im voll nichtlinearen Regime. Die Anomalie hat die

Form eines “Kelvin’schen Katzenauges” (engl. “Kelvin’s cats’-eye”, siehe z.B. Killworth and McIntyre 1985).

Wieso hat die Verlängerung des Kanals aus einer stabilen eine instabile Situation gemacht? Interpretiere dieses Phänomen im Rahmen des PV-Denkens (siehe dazu wieder den Artikel von Hoskins *et al.* (1985), speziell den Abschnitt 6 darin). Eine gute Antwort auf die Frage findet man auch im Lehrbuch von Gill (1982, Kapitel 13.6).

4.4 Orographischer Antrieb und Rossbywellen

In diesem Abschnitt betrachten wir das Modell inklusive eines orographischen Antriebs und eines Dissipationsterms gemäß (18). Wir führen hier die dimensionslose Orographie ein gemäß

$$\hat{h}_b := \frac{h_b}{D} \; . \tag{44}$$

Man erhält somit als Modellgleichung:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla q - \mathbf{v} \cdot \nabla (f_0 \hat{h}_b) - \alpha (q - q_{\mathrm{ref}}) \; . \tag{45}$$

In den meisten Fällen können wir auf die (explizite) Dissipation verzichten, und die implizite numerische Diffusion bewirkt ohnehin schon eine gewisse Dissipation. Mit anderen Worten: in diesem Abschnitt setzen wir stets $\alpha = 0$ außer dort, wo es explizit anders gewünscht wird. In letzterem Falle wählen wir $q_{\mathrm{ref}} = \bar{q}$, wobei $\overline{(\ldots)}$ das zonale Mittel bezeichnet.

Einen hervorragenden Artikel zur linearen Theorie von stationären und quasi-stationären Rossbywellen findet man in Held (1983).

Die dimensionslose Orographie hat die Form eines langgestreckten Gebirgszugs in Nord-Süd-Richtung,

$$\hat{h}_b(x, y) = \hat{H}_b \exp\left[-2(k_b^2 (x - x_m)^2)\right] \; , \tag{46}$$

wobei x_m das Kanalzentrum bezeichnet und die “Wellenzahl” k_b die geometrische Ausdehnung der Orographie charakterisiert.

“Downstream Development”

Wir betrachten zunächst folgende Parameter:

L_x	L_y	f_0	β	u_0	$\hat{H}_b$	k_b
12000 km	3000 km	$1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$	$1.6 \times 10^{-11}\ \mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$	$5\ \mathrm{m\,s}^{-1}$	0.05	$2\pi/L_x$

Für die zeitliche Entwicklung analysieren wir primär die räuliche Verteilung der PV. Wir erhalten zunächst (während der ersten 4 Tage) einen deutlichen Trog im unmittelbaren Lee des Gebirges. Nach etwa 4 Tagen kommt östlich dieses Trogs ein neuer Rücken hinzu, und nach etwa 10 Tagen gesellt sich östlich dieses Rücken wieder ein neuer Trog hinzu. Dabei sind diese Tröge und Rücken nahezu stationär. Diese Form der Entwicklung nennt man “stromabwärts gerichtete Entwicklung”, oder auf Englisch “ downstream development”. Es bedeutet, dass sich die neuen Rücken und Tröge im Lee der schon vorhandenen Tröge oder Rücken bilden, und zwar schneller, als es die reine Advektion durch den Hintergrundswind nahelegen würde. Konkret erhält man im vorliegenden nach 10 Tagen etwa 5500 km im Lee des Gebirges einen neuen Trog. Ein Luftpaket mit $u_0 = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ hingegen legt in 10 Tagen nur eine Strecke von 4320 km zurück. Die leeseitige Entwicklung kann also *nicht* als advektiver Vorgang mit dem Hintergrundswind u_0 interpretiert werden.

Der klassische Artikel, in dem der Begriff des "downstream development" eingeführt wurde, ist übrigens Chang (1993).

Interpretiere die Entwicklung im Sinne des "PV-Denkens". Mache Dir insbesondere klar, wie die leeseitige Antizyklone durch Advektion von niederiger PV aus dem Süden entsteht. Wenn dort der Windpfeil die PV-Kontur schneidet, bewirkt die PV-Kontur-senkrechte Windkomponente eine Advektion. In diesem Bereich außerhalb der Orographie kann die Modellgleichung wie folgt angenähert werden:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla q \;. \tag{47}$$

Auf der anderen Seite bläst der Wind am lufseitigen Hang des Berges oftmals *nicht* parallel zu den PV-Konturen, doch trotzdem ist das PV-Feld dort näherungsweise stationär. Wie kann das sein? Mache Dir klar, dass in diesem Bereich die Modellgleichung wie folgt angenähert werden kann:

$$0 = -\mathbf{v} \cdot \nabla q - \mathbf{v} \cdot \nabla (f_0 \hat{h}_b) \;, \tag{48}$$

oder

$$\mathbf{v} \cdot \nabla (q + f_0 h_b) = 0 \;. \tag{49}$$

Das bedeutet, dass der Horizontalwind parallel zu den Konturen von $(q + f_0 \hat{h}_b)$ verlaufen muss, nicht etwa zu den Konturen von q.

Wiederhole das Experiment mit einem Ostwind als Hintergrundswind, z.B. $u_0 = -5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Das Auftreten von Wellen ist im Vergleich zu vorher stark unterdrückt. Warum?

Wiederhole das Experiment auf der f-Ebene, indem Du $\beta = 0$ setzt. Was passiert? Warum gibt es keine Rossbywellen? (Ein anschauliche Antwort auf diese Frage enthält das Kapitel 4.3 im Lehrbuch von Holton (2004)).

Lineare orographische Rossbywellen

Wir wollen versuchen, das "downstream development" aus dem vorigen Experiment besser zu verstehen. Dazu reduzieren wir die Amplitude des Berges, sodass wir nur recht kleine Wellen anregen und damit in den Bereich der linearen Theorie kommen:

L_x	L_y	f_0	β	u_0	$\hat{H}_b$	k_b
12000 km	3000 km	$1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s^{-1}}$	$1.6 \times 10^{-11}\ \mathrm{s^{-1} m^{-1}}$	$5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$	0.02	$2\pi/L_x$

Wir nehmen an, dass unsere Rossbywelle die folgende Form hat:

$$\psi'(x, y) = \hat{\psi}\, e^{ik_x x} \cos(l_y y) \tag{50}$$

(Realteil impliziert). Der sich entwickelnde Wellenzug hat offenbar in guter Näherung eine stationäre Phase. Die Dispersionsrelation für Rossbywellen zeigt, dass in diesem Spezialfall

$$k_x^2 + l_y^2 = \frac{\beta}{u_0} \tag{51}$$

gelten muss. Hierbei ist u_0 der zonale Grundstrom im Rahmen der linearen Theorie und k_x sowie l_y sind die Wellenzahlen in x- bzw. y-Richtung. Den Grundstrom dürfen wir hier mit unserer Hintergrundströmung u_0 identifizieren.

Benutze die obige Beziehung, um die x-Wellenlänge λ_x der orographisch angeregten Wellen abzuschätzen:

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\beta}{u_0} - l_y^2}} \,. \tag{52}$$

Zeige, dass diese Schätzung für λ_x gut mit der tatsächlichen Wellenlänge im numerischen Experiment übereinstimmt. Verifiziere die Beziehung (52) ferner durch ein Experiment mit $u_0 = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ an Stelle von $u_0 = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Wie lässt sich das "downstream development" erklären? Die Theorie besagt, dass die Ausbreitung der Energie durch die Gruppengeschwindigkeit geregelt wird. Letztere kann bei einer barotropen Rossbywelle größer als c, ja manchmal sogar größer als die Grundstromgeschwindigkeit u_0 sein. Leite zunächst her, dass

$$c_g^{(x)} = u_0 \left[1 + \frac{u_0}{\beta}(k_x^2 - l_y^2)\right] \tag{53}$$

gilt. Ob $c_g^{(x)}$ größer oder kleiner ist als u_0 hängt demnach davon ab, ob k_x größer oder kleiner ist als l_y. Beachte dabei, dass hier $l_y = 2\pi/(2L_y)$ anzusetzen ist (warum?).

Schätze ab, wie weit sich innerhalb von 10 Tagen (i) ein Luftpaket und (ii) das Wellensignal ostwärt ausbreitet und verifiziere dies in der Simulation. Was passiert, wenn der Kanal doppelt so breit gemacht wird ($L_y = 6000$km)? Ist das konsistent mit (53)?

Sehr spitzer Berg

Es ist befriedigend, dass im vorigen Experiment gute Übereinstimmung zwischen der linearen Theorie und dem numerischen Lauf gefunden wurde. Dennoch könnte einen der Verdacht beschleichen, dass die Wellenlänge des entstehenden Rossbywellenzugs irgendwie mit der charakteristischen Breite der Orographie zusammenhängt.

Um diese Frage zu untersuchen, führen wir einen Lauf mit einem sehr spitzen Berg durch:

L_x	L_y	f_0	β	u_0	$\hat{H}_b$	k_b
12000 km	3000 km	$1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s^{-1}}$	$1.6 \times 10^{-11}\ \mathrm{s^{-1}m^{-1}}$	$5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$	0.02	$8\pi/L_x$

Die zeitlichen Entwicklung zeigt, dass während der ersten zwei bis drei Tage in der Tat in x-Richtung eine sehr viel kleinere Wellenlänge vorherrscht, die offenbar damit zusammenhängt, dass die Orographie jetzt sehr viel schmäler ist. In den folgenden Tagen jedoch wandern die entstehenden Tröge und Rücken allmählich nach Osten. Nach gut 10 Tagen hat der Rossbywellenzug eine Wellenlänge erreicht, wie man sie aus der linearen Theorie für freie Rossbywellen erwarten würde. Diese Wellenlänge hat sich nach ca. 15 Tagen voll etabliert und verändert sich im weiteren Verlauf nicht mehr.

Resonanz

Gemäß der Arbeit von Charney and Eliassen (1949) sagt lineare Wellentheorie (im reibungsfreien Fall) Resonanz im Kanal vorher, falls die Wellenzahl des Antriebs mit der freien Wellenzahl übereinstimmt.[2]

Führe folgendes numerisches Experiment (zumächst mit $\alpha = 0$) durch:

L_x	L_y	f_0	β	u_0	$\hat{H}_b$	k_b
8900 km	3000 km	$1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$	$1.6 \times 10^{-11}\,\mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$	$5\ \mathrm{m\,s}^{-1}$	0.02	$2\pi/L_x$

Die zeitliche Entwicklung zeigt, dass sich nach circa 30 Tagen ein stationäres Strömungsmuster der zonalen Wellenzahl $s = 2$ mit ziemlich starker Amplitude einstellt. Mache Dir klar, dass die hier vorgegebenen Parameter genau der Resonanzbedingung für $s = 2$ entspricht.

Wiederhole dieses Experiment mit größeren und kleineren Werten von u_0 und interpretiere das Ergebnis.

Wiederhole dieses Experiment mit $\alpha = 1 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}^{-1}$ (und evtl. auch mit $\alpha = 3 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}^{-1}$) und interpretiere das Ergebnis.

Probiere auch andere Formen der Orographie (z.B. einen rein sinus-förmigen Berg mit $s = 2$) und untersuche das Verhalten. Erklärung?! Untersuche insbesondere, wie die Amplitude der Lösung von u_0 abhängt. Wie ist die Phasenlage zwischen der Orographie und der Stromfunktion im Falle der Resonanz. Vergleiche mit dem Modell von Charney und Eliassen.

Stark nichtlineare Entwicklung

Wir kehren jetzt wieder zur ungedämpften Bewegung zurück (d.h. $\alpha = 0$) und erhöhen die Amplitude des Berges signifikant:

L_x	L_y	f_0	β	u_0	$\hat{H}_b$	k_b
12000 km	3000 km	$1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$	$1.6 \times 10^{-11}\,\mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$	$5\ \mathrm{m\,s}^{-1}$	0.1	$2\pi/L_x$

Die zeitliche Entwicklung zeigt deutlich, dass wir uns jetzt in einem stark nichtlinearen Regime befinden. Bereits nach drei bis vier Tagen ist die Strömung über dem Berg primär meridional und nicht mehr zonal. Das bedeutet, dass lineare Theorie, in welcher die orographische Anregung durch $-u_0\partial_x(f_0\hat{h}_b)$ angenähert wird, vollkommen falsch ist. Entsprechend hat die numerische Entwicklung auch keinerlei Ähnlichkeit mit der linearen Theorie. Gemäß der Theorie sollte durch die Orographie ein Rossbywellenzug angeregt werden (vgl. die vorigen Experimente!). Stattdessen erhalten wir hier einen starken zyklonalen Wirbel im Bereich der leewärtigen Orographie, der die Dynamik praktisch vollkommen dominiert.

4.5 Thermischer Antrieb: Monsun

Die zu lösende Gleichung lautet (25). Wir führen noch ein

$$\hat{Q} = \frac{Q}{D} \qquad (\mathrm{in\,s}^{-1}) \tag{54}$$

ein und verwenden $q_{\mathrm{ref}} = f$. Damit schreibt sich die Modellgleichung (25) wie folgt

$$\frac{Dq}{Dt} = -f_0\hat{Q} - \alpha(q - f)\ . \tag{55}$$

[2]Dies gilt für die einfachste Form des sinunsförmigen Antriebs.

Als thermischen Antrieb geben wir folgende Funktion vor

$$\hat{Q} = A_Q \exp\left[-2(k^2(x-x_m)^2 + m^2(y-y_m)^2)\right] , \tag{56}$$

wobei (x_m, y_m) die Mitte des Kanals bezeichnet, A_Q die Amplitude ist und (k, m) die "Wellenzahlen" für die x bzw. y-Richtung. Die Ausdehnung des Gebiets ist in diesem gesamten Unterabschnitt 4.5 wie folgt zu wählen: $L_x = 6000\,\text{km}$ und $L_y = 3000\,\text{km}$.

Interessante Arbeiten zur Entstehung eines Monsuns durch diabatische Heizung sind Hoskins and Rodwell (1995), Rodwell and Hoskins (1996) und Hsu and Plumb (2000). Ein Schlüsselartikel ist Gill (1980), obgleich darin nicht wie bei uns eine extratropische β-Ebene betrachtet wird, sondern die äquatoriale β-Ebene; dies liefert eine Reihe von zusätzlichen Phänomenen.

Monsun-Antizyklone

Verwende zunächst folgende Parameter:

f_0	β	u_0	α	A_Q	k	m
$1 \times 10^{-4}\,\text{s}^{-1}$	$1.6 \times 10^{-11}\,\text{s}^{-1}\text{m}^{-1}$	$0\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$	$1 \times 10^{-5}\,\text{s}^{-1}$	$1 \times 10^{-5}\,\text{s}^{-1}$	$2\pi/L_x$	π/L_y

Die Zeitliche Entwicklung zeigt, dass durch die Heizung bereits nach ca. einem Tag eine deutlich sichtbare Antizyklone entstanden ist. Dank der Dämpfung ist die Entwicklung nach ca. drei Tagen näherungsweise stationär.

Dieses numerische Experiment gibt in idealisierte Form die Entwicklung eines Monsuns wieder. Bei einem Monsun besteht die Heizung im Wesentlichen aus der Freisetzung von latenter Wärme in der Mitte der freien Atmosphäre. Als Antwort darauf entsteht in der oberen Troposphäre eine Antizyklone.

Beachte, dass bei der vorliegenden Wahl der Parameter die Antizyklone nicht genau über der Heizung zentriert ist. Dies ist ein nichtlinearer Effekt, analog zu den weiter oben besprochenen Beta-Wirbeln. Erkläre den Effekt hier.

Lineare Monsunantizyklone

Um näherungsweise in ein lineares Regime zu kommen, muss die Amplitude der Heizung reduziert werden. Wir verwenden die folgenden Paramter:

f_0	β	u_0	α	A_Q	k	m
$1 \times 10^{-4}\,\text{s}^{-1}$	$1.6 \times 10^{-11}\,\text{s}^{-1}\text{m}^{-1}$	$0\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$	$1 \times 10^{-5}\,\text{s}^{-1}$	$1 \times 10^{-6}\,\text{s}^{-1}$	$2\pi/L_x$	π/L_y

Wie unterscheidet sich die zeitliche Entwicklung vom vorherigen Lauf?

Linearisiert man die Gleichung (55) um den Grundzustand der Ruhe, so ergibt sich im Falle stationärer Strömung (zeige dies!)

$$\beta v' + \alpha \zeta' = -f_0 \hat{Q}' , \tag{57}$$

wobei der Apostroph eine lineare Störgröße bezeichnet. Das bedeutet, dass im stationären Endzustand die vorgegebene Heizung $\hat{Q} > 0$ durch eine Kombination aus negativer (antizyklonaler) relative Vorticity und negativer Strömung (Nordwind) kompensiert wird. Zeige, dass dies im vorliegenden numerischen Experiment der Fall ist.

Monsun mit Hintergrundsströmung

Die Verhältnisse ändern sich, wenn das Monsunsystem in einer Hintergrundsströmung eingebettet ist. Verwende die folgenden Paramter:

f_0	β	u_0	α	A_Q	k	m
$1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$	$1.6 \times 10^{-11}\ \mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$	$20\,\mathrm{m\,s}^{-1}$	$1 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$	$1 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$	$2\pi/L_x$	π/L_y

Die zeitliche Entwicklung ist wieder stärker nichtlinear (wegen der wieder größer gewählten Amplitude A_Q). Zugleich wird die Monsunantizyklone ein wenig nach Osten verschoben (relativ zum Zentrum der Heizung).

4.6 Thermisch getriebene Rossbywellen

Neben orographischen Hindernissen ist die Heizung und Kühlung ein wichtiger Antriebsmechanismus für planetare Rossbywellen (siehe Held, 1983, und Referenzen darin). Wir wählen in diesem Abschnitt die Form des Antriebs wie in (56), aber verwenden $L_x = 12000$ km und $L_y = 3000$ km. Die anderen Paramter sind wie folgt:

f_0	β	u_0	α	A_Q	k	m
$1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$	$1.6 \times 10^{-11}\ \mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$	$5\,\mathrm{m\,s}^{-1}$	$0\,\mathrm{s}^{-1}$	$0.05 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$	$4\pi/L_x$	$2\pi/L_y$

Die zeitliche Entwicklung zeigt während der ersten paar Tage die Entstehung einer (diesmal schwachen) Antizyklone über der Stelle der Heizung. Nach ca. 10 Tagen sieht man den Beginn eines Rossbywellenzugs, welcher sich vom Ort der Heizung ostwärts erstreckt.

Literatur

Babiano, A., C. Basdevant, B. Legras, and R. Sadourny 1987. Vorticity and passive-scalar dynamics in two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.* **183**, 379–397.

Chang, E. K. M. 1993. Downstream development of baroclinic waves as infered from regression analysis. *J. Atmos. Sci.* **50**, 2038–2053.

Charney, J. G., and A. Eliassen 1949. A numerical method for predicting the perturbations of the middle latitude westerlies. *Tellus* **1**, 38–54.

Gill, A. E. 1980. Some simple solutions for heat-induced tropical circulation. *Quart. J. Roy. Met. Soc.* **106**, 447–462.

Gill, A. E. 1982. *Atmosphere–Ocean Dynamics.* Academic Press, New York, 662 pp.

Held, I. M. 1983. Stationary and quasi-stationary eddies in the extratropical troposphere: theory. In B. J. Hoskins and R. P. Pearce (Eds.), *Large Scale Dynamical Processes*, pp. 127–168. Academic Press.

Holton, J. R. 2004. *An Introduction to Dynamical Meteorology.* Elsevier Academic Press, 529 pp., fourth edition.

Hoskins, B. J., M. E. McIntyre, and A. W. Robertson 1985. On the use and significance of isentropic potential vorticity maps. *Quart. J. Roy. Met. Soc.* **111**, 877–946.

Hoskins, B. J., and M. J. Rodwell 1995. A Model of the Asian Summer Monsoon. Part I: The Global Scale. *J. Atmos. Sci.* **52**, 1329–1340.

Hsu, C. J., and R. A. Plumb 2000. Non-axisymmetric thermally driven circulations and upper tropospheric monsoon dynamics. *J. Atmos. Sci.* **57**, 1255–1276.

Juckes, M., and M. E. McIntyre 1987. A high-resolution one-layer model of breaking planetary waves in the stratosphere. *Nature* **328**, 590–596.

Killworth, P. D., and M. E. McIntyre 1985. Do Rossby-wave critical layers absorb, reflect or over-reflect? *J. Fluid Mech.* **161**, 449–492.

Legras, B., and D. Dritschel 1993. Vortex Stripping and the Generation of High Vorticity Gradients in Two-Dimensional Flows. *Applied Scientific Research* **51**, 445–455.

Mariotti, A., B. Legras, and D. G. Dritschel 1994. Vortex stripping and the erosion of coherent structures in two-dimensional flows. *Phys. Fluids* **6**, 3954–3962.

McWilliams, J. C. 1984. The Emergence of Isolated Coherent Vortices in Turbulent Flow. *J. Fluid Mech.* **146**, 21–43.

Melander, M. V., J. D. McWilliams, and N. J. Zabusky 1987. Axisymmetrization and vorticity-gradient intensification of an isolated two-dimensional vortex through filamentation. *J. Fluid Mech.* **178**, 137–159.

Rodwell, M. J., and B. J. Hoskins 1996. Monsoons and the dynamics of deserts. *Quart. J. Roy. Met. Soc.* **122**, 1385–1404.

Sutyrin, G. G., and G. R. Flierl 1994. Intense vortex motion on the beta plane: Development of the beta gyres. *Journal of Atmospheric Sciences* **51**, 773–790.