

DAS ELIASSEN-PROBLEM:

Reaktion einer balancierten Strömung auf eine schwache externe Störung

Ein numerischer Praktikumsversuch

von

Prof. Volkmar Wirth
(Universität Mainz)

August 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Das Modell	2
2.1	Grundgleichungen	2
2.2	Balancierte Primärströmung	2
2.3	Sekundärzirkulation	3
2.4	Zeitliche Entwicklung der Primärströmung	4
3	Analytische Lösungen	4
3.1	Analytische Lösung mit diabatischer Heizung	4
3.2	Analytische Lösung mit Rayleigh-Reibung	5
4	Numerische Aufbereitung	5
4.1	Die Methode der Finiten Differenzen	5
5	Das Fortran-90 Programm und sein Output	7
5.1	Getting Started	7
5.2	Aufgaben	8
6	Vorschläge für Modellstudien	8
6.1	Modellstudien mit diabatischer Heizung	9
6.2	Modellstudien mit Rayleigh-Reibung, zeitliche Entwicklung	9
7	Anhang A: Kurze Beschreibung des SOR Verfahrens	11
8	Literatur	12

Dieser Computerversuch ist über mehrere Jahre von mir entwickelt worden. Die Studierenden Marc Salzmann, Hermann Asensio und Lucia Göring haben mit zahlreichen Anregungen dazu beigetragen. Ihnen möchte ich an dieser Stelle herzlich danken.

1 Einleitung

Betrachte auf der rotierenden Erde eine zonalsymmetrische Strömung, d.h. eine Strömung, die nicht von der geographischen Länge abhängt, sondern nur von der geographischen Breite und der Höhe über dem Erdboden. Ferner sei die Strömung *balanciert*, was einen diagnostischen Zusammenhang zwischen Massen- und Windfeld impliziert. Für konservative Verhältnisse (d.h. falls keine externen Anregungen vorhanden sind) kann man unter diesen Voraussetzungen zeigen, daß es eine stationäre, rein zonale Lösung der Bewegungsgleichungen gibt.

Das Eliassenproblem stellt die Frage, was passiert, wenn man in einer solchen Primärströmung eine schwache nichtkonservative (externe) Anregung einschaltet. Man kann vermuten, daß die nichtkonservativen Terme versuchen, die Balance zu zerstören. Dies dürfte zur Folge haben, daß sich die Primärströmung allmählich verändert und gleichzeitig eine (schwache) *Sekundärzirkulation* in der meridionalen und vertikalen Richtung entsteht. Abbildung 1 veranschaulicht die Situation.

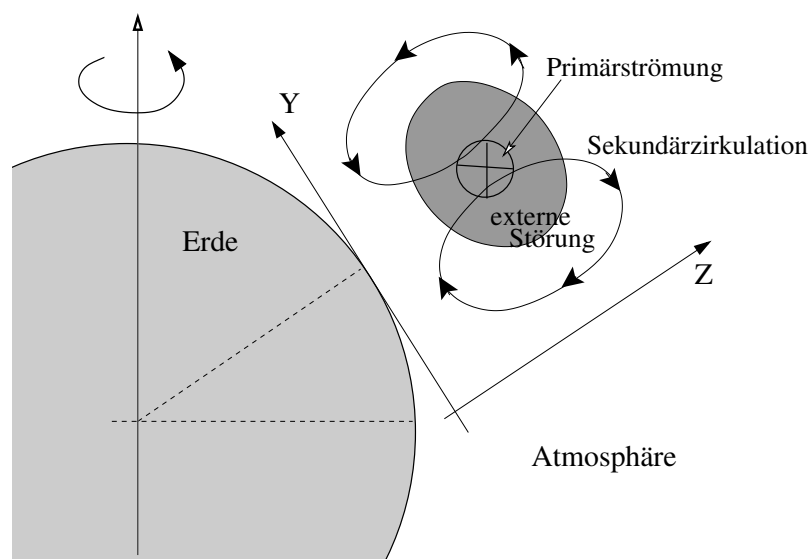


Abbildung 1: Veranschaulichung der Geometrie des Eliassenproblems. A. Eliassen untersuchte ursprünglich zonalsymmetrische Strömung auf der Erdkugel; im vorliegenden Praktikumsversuch wird nur eine f -Ebene betrachtet, welche durch das tangential an die Kugel angefügte Koordinatensystem dargestellt ist.

Arndt Eliassen hat das oben gestellte Problem im Jahr 1952 gelöst, und seine Arbeit ist auch heute noch lesenswert. Natürlich stellt die Situation eine gewisse Idealisierung der tatsächlichen Verhältnisse dar. Immerhin, man beobachtet, daß auf der Erde der Wind vorherrschend in West-Ost-Richtung bläst; wenn man also von den planetaren Rossbywellen und kleineren Störungen absieht, so kann man die Strömung (vor allem in der Stratosphäre) in erster Näherung als zonalsymmetrisch ansehen. Die Bedeutung des Eliassenproblems rührt jedoch vor allem daher, daß es als prototypisch für allgemeinere quasibalancierte Strömungen angesehen werden kann. Es verdeutlicht, daß auf einem schnell rotierenden Planeten die Antwort einer Primärströmung auf eine externe Störung relativ komplex und gegen die naive Intuition sein kann. Ein besonderes Element ist die *„Nichtlokalität“* der Reaktion, welche sich darin äußert, daß die *„induzierte Sekundärzirkulation“* räumlich über das Gebiet der externen An-

regung hinausreicht (siehe Abb. 1). Mathematisch gesehen kommt das dadurch zustande, daß die Gleichung für die Sekundärzirkulation eine *elliptische partielle Differentialgleichung* ist.

In dem vorliegenden Praktikumsversuch wird eine vereinfachte Version des Eliassenproblems betrachtet. Wir beschränken uns auf quasi-geostrophische Strömung auf der f -Ebene. Zonalsymmetrie bedeutet in diesem Fall, daß alle Variablen unabhängig von der zonalen Koordinate x sind (d.h. $\partial/\partial x \dots = 0$). In Abbildung 1 wird das Koordinatensystem der f -Ebene als Tangentialsystem an die Erdkugel dargestellt.

Neben dem Originalartikel von A. Eliassen bringt das Lehrbuch von Gill in Kapitel 9.14 und 9.15 eine gute Einführung in die Dynamik einer balancierten Strömung mit externer Anregung.

2 Das Modell

2.1 Grundgleichungen

Die Gleichungen für zonalsymmetrische Strömung auf der f -Ebene in quasi-geostrophischer Näherung lauten wie folgt

$$u_t - f v = X, \quad (1)$$

$$f u = -\Phi_y, \quad (2)$$

$$\Phi_z = \frac{g}{T_s} T, \quad (3)$$

$$v_y + \rho_0^{-1} (\rho_0 w)_z = 0, \quad (4)$$

$$T_t + S w = Q. \quad (5)$$

Hierbei ist y die Koordinate in der meridionalen Richtung und $z = -H \ln(p/p_0)$ die Vertikalcoordinate, wobei H eine konstante Skalenhöhe bezeichnet und p_0 einen konstanten Referenzdruck. Subskript einer Koordinate (einschließlich der Zeit t) bedeutet partielle Ableitung nach dieser Koordinate. Die Variable u bezeichnet den geostrophischen Zonalwind, v und w sind der ageostrophische Meridional- bzw. Vertikalwind, f der (konstante) Coriolisparameter, Φ das Geopotential, T die Temperatur, X und Q sind die nichtkonservativen Terme in der Gleichung für den Zonalimpuls bzw. in der Wärmeleichung. Die Größe T_s ist eine konstante Referenztemperatur, die mit der Gaskonstante R , der Skalenhöhe H und der Erdbeschleunigung g über die Beziehung $gH = RT_s$ verknüpft ist. Das Dichteprofil in $\ln p$ -Vertikalkoordinaten ist $\rho_0(z) = \rho_{00} \exp(-z/H)$ mit $\rho_{00} = p_0/(RT_s)$. Die Konstante S charakterisiert die statische Stabilität der Referenzatmosphäre. Alle Variablen sind Funktionen von y , z und t .

2.2 Balancierte Primärströmung

Wenn $X = Q = 0$ gilt, spricht man von konservativen Verhältnissen. In diesem Spezialfall läßt das obige Gleichungssystem eine einfache stationäre Lösung zu mit $u = u(y, z)$, $T = T(y, z)$ und $v = w = 0$ (zeige dies!). Es verbleibt eine nichttriviale Grund- oder Primärströmung $u(y, z)$, welche mit der Temperatur in folgender Beziehung steht

$$\boxed{f u_z = -\frac{g}{T_s} T_y} \quad (6)$$

(zeige dies!). Dies ist die thermische Windgleichung, und die entsprechende Lösung nennt man "*Lösung des thermischen Gleichgewichts*". Gleichung (6) definiert im vorliegenden Fall

den Zustand der “Balance”: es ist dies ein *diagnostische Zusammenhang* zwischen dem Wind- und dem Temperaturfeld, der den meridionalen Temperaturgradienten T_y mit der vertikalen Windscherung u_z verknüpft.

2.3 Sekundärzirkulation

Nimm nun an, daß schwache (natürlich zonalsymmetrische!) nichtkonservative Terme $X(y, z)$ und $Q(y, z)$ vorhanden sind. Gleichung (1) zeigt, daß dann entweder die Stationarität verloren geht oder eine ageostrophische Windkomponente v auftritt, oder beides. Egal was passiert, es werde angenommen, daß die nichtkonservativen Terme so schwach sind, daß weiterhin (6) gilt, daß die Strömung also während der nun einsetzenden langsamen zeitlichen Entwicklung *quasi-balanciert* bleibt.

Man kann sich überlegen, daß die letztgenannte Annahme es zwingend erforderlich macht, daß eine ageostrophische *Sekundärzirkulation* (v, w) entsteht. Nimm etwa an, daß $X \neq 0$, aber $Q = 0$ ist. Wäre nun weiterhin $v = 0$, so wäre nach (4) auch $w = 0$ und wegen (5) die Temperatur T zeitlich konstant. Es würde sich also lediglich u zeitlich verändern. Das kann aber nach (6) nicht sein, denn letztere Gleichung ist ein diagnostischer Zusammenhang zwischen u und T . Es folgt, daß ein ageostrophischer Wind zwingend erforderlich wird. Der muß gerade so beschaffen sein, daß sich die Temperaturverteilung $T(y, z, t)$ und Primärströmung $u(y, z, t)$ im Gleichklang so verändern, daß tatsächlich ständig die Balancegleichung (6) gültig bleibt (was wir angenommen haben).

Den ageostrophischen Wind (v, w) , der die Balance (6) auch während der zeitlichen Veränderung von u und T gewährleistet, erhält man wie folgt. Leite (1) partiell nach z und (5) partiell nach y ab und benütze die Zeitableitung von (6), um eine Gleichung herzuleiten, welche nur v, w, Q und X , nicht aber u und T enthält. Als nächstes führt man eine Massenstromfunktion $\psi(y, z)$ für die Meridionalzirkulation wie folgt ein:

$$\rho_0 v = -\psi_z, \quad (7)$$

$$\rho_0 w = \psi_y. \quad (8)$$

Damit ist die Kontinuitätsgleichung (4) automatisch erfüllt. Drückt man v und w über die Stromfunktion ψ aus, so ergibt sich

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{N^2}{\rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f^2}{\rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = F(y, z)}, \quad (9)$$

mit

$$F(y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{g}{T_s} Q \right) + \frac{\partial}{\partial z} (fX). \quad (10)$$

Hierbei ist $N^2 = gT_s^{-1}S$.

Die Lösung dieser Gleichung liefert die “*induzierte Sekundärzirkulation*” als Reaktion der zonalsymmetrischen Primärströmung auf die von außen auferlegte, schwache, nicht-konservative Störung $F(y, z)$. Es handelt sich um eine *elliptische Differentialgleichung* für die Stromfunktion ψ , welche nach Spezifikation geeigneter Randbedingungen gelöst werden kann. Die Gleichung ist linear in Q und X , d.h. je stärker die externe Anregung ist, desto stärker ist die induzierte Sekundärzirkulation. Das Element der *Nichtlokalität* kommt dadurch ins Spiel, daß für eine stark lokalisierte Anregung F die Lösung der elliptischen Differentialgleichung in der Regel deutlich über die Region der Anregung hinausreicht.

2.4 Zeitliche Entwicklung der Primärströmung

Hat man durch Lösen von (9) das ψ und damit (nach (7) und (8)) v und w berechnet, so ergeben sich die Zeittendenzen von u und T aus (1) und (5) wie folgt

$$u_t = fv + X, \quad (11)$$

$$T_t = -Sw + Q. \quad (12)$$

Durch Zeitintegration erhält man daraus die Veränderung der (balancierten) Primärströmung. Die Meridionalzirkulation v und w ist dabei gerade so, daß die Primärströmung stets in Balance bleibt, d.h. obzwar sich u und T verändern, bleibt die Beziehung (6) zwischen u und T erhalten. Dies ist natürlich nicht ein Mirakel, sondern ergibt sich "per Konstruktion".

3 Analytische Lösungen

Wir machen jetzt einige zusätzliche vereinfachende Annahmen, um zunächst analytische Lösungen herzuleiten. Nimm dazu an, der betrachtete Bereich in der Meridionalebene (y - z -Ebene) sei rechteckig; er reiche in der Vertikalen von $z = 0$ bis $z = Z$ und in der Horizontalen von $y = 0$ bis $y = Y$. Ferner sei $\rho_0 = \text{const.}$

3.1 Analytische Lösung mit diabatischer Heizung

Betrachte zunächst eine Situation mit diabatischer Anregung. Es sei $X = 0$ und

$$Q(y, z) = Q_0 \cos ly \sin mz, \quad (13)$$

wobei Q_0 eine Konstante ist und $l = \pi/Y$, $m = \pi/Z$.

- Bestimme die analytische Lösung ψ der Gleichung (9), wobei am Rand $\psi = 0$ vorgeschrieben sei.
- Berechne v und w und fertige eine Skizze an, in der alle relevanten Größen erscheinen.
- Zeige, daß in dem vorliegenden Beispiel die Beziehung

$$\frac{\partial T}{\partial t}(y, z) = \left(\frac{1}{1 + \mathcal{A}^2} \right) Q(y, z) \quad (14)$$

erfüllt ist. Hierbei ist

$$\mathcal{A} := \frac{Z/Y}{|f|/N} \quad (15)$$

das (skalierte) *Aspektverhältnis*. Folgere daraus, daß die lokale Erwärmung $\partial T/\partial t$ kleiner oder höchstens gleich der Heizung Q ist.

- Diskutiere die Beziehung (14) für verschiedene Aspektverhältnisse, d.h. für (i) $\mathcal{A} \ll 1$, (ii) $\mathcal{A} \approx 1$ und (iii) $\mathcal{A} \gg 1$. Interpretation?! Inwiefern bewirkt die Sekundärzirkulation eine *teilweise Kompensation* der externen Störung? Wovon hängt die Stärke der Kompensation ab?

3.2 Analytische Lösung mit Rayleigh-Reibung

Es sei $Q = 0$ und

$$X = -\alpha u \quad (16)$$

mit $\alpha = \text{const}$ und $u(y, z) = u_0 \sin mz \sin ly$ ($u_0 = \text{const}$, $l = \pi/Y$, $m = \pi/(2Z)$). Die Form (16) der Implusdämpfung nennt man "Rayleigh-Reibung".

Zeige, daß in diesem Falle eine mögliche Lösung von (9) durch

$$\psi(y, z) = \frac{\alpha u_0 f m \rho_0}{l^2 N^2 + m^2 f^2} \cos mz \sin ly \quad (17)$$

gegeben ist, und daß daraus

$$u_t(y, z) = \left(\frac{\mathcal{A}^2}{1 + \mathcal{A}^2} \right) X(y, z) \quad (18)$$

folgt. Sinnvollerweise definiert man hier das skalierte Aspektverhältnis (anders als oben) wie folgt:

$$\mathcal{A} := \frac{2Z/Y}{|f|/N} \quad (19)$$

Skizze?! Diskussion der Abhängigkeit vom skalierten Aspektverhältnis \mathcal{A} ? Unterschied zur vorigen analytischen Lösung?!

4 Numerische Aufbereitung

4.1 Die Methode der Finiten Differenzen

Im vorigen Abschnitt haben wir die Gleichung (9) für die Massenstromfunktion der Sekundärzirkulation unter vereinfachenden Annahmen analytisch gelöst.

Jetzt soll diese Gleichung numerisch behandelt werden, um für allgemeinere Fälle wenigstens numerische Lösungen berechnen zu können. Dazu wenden wir die *Methode der Finiten Differenzen* an:

Zunächst werden alle Funktionen durch ihre Funktionswerte an diskreten Punkten in der y - z -Ebene $(y_j, z_k)_{j=1, \dots, jmax, k=1, \dots, kmax}$ dargestellt (siehe Abb. 2). Die Menge der Punkte (oder Stützstellen) bezeichnet man oft als Gitter, die Funktionswerte stellen das diskretisierte Feld dar. Anstelle der Funktion $Q(y, z)$ erhalten wir somit eine Matrix $Q_{j,k} = Q(y_j, z_k)$. Das Gitter läßt sich mathematisch wie folgt beschreiben:

$$y_j = y_1 + (j - 1)\Delta y, \quad j = 1, \dots, jmax, \quad (20)$$

$$z_k = z_1 + (k - 1)\Delta z, \quad k = 1, \dots, kmax, \quad (21)$$

wobei Δy und Δz die Abstände zwischen den Gitterpunkten in y - bzw. z -Richtung bezeichnen und $jmax \times kmax$ deren Anzahl ist.

Hinweis: An dieser Stelle könntest Du zur Übung die Aufgaben (i) und (ii), Abschnitt 5.2 bearbeiten.

Um räumliche Ableitungen einer Funktion mit Hilfe von finiten Differenzen darzustellen, verwendet man oft *zentrierte Differenzen* (vgl. Aufgabe (v), Abschnitt 5). Die ersten beiden Ableitungen einer Funktion $f(x)$ am Gitterpunkt i sind dann wie folgt definiert:

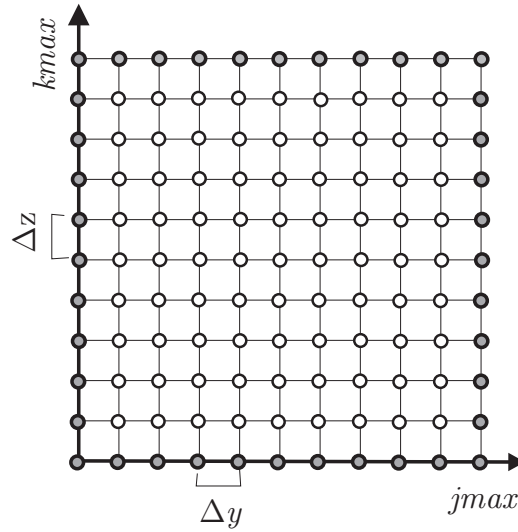


Abbildung 2: Zweidimensionales Gitter in der y - z Ebene. Randpunkte sind schattiert dargestellt. Bei der Lösung von (29) müssen an diesen Punkten die Randwerte vorgegeben werden.

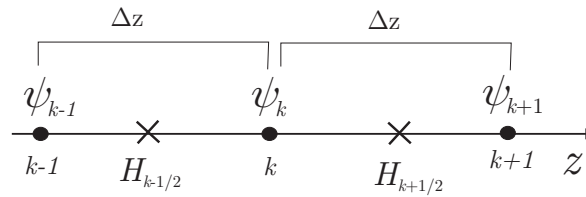


Abbildung 3: Gitterpunkte in z -Richtung: ψ_k ist die Stromfunktion am Gitterpunkt k und $H_{k\pm 1/2}$ sind die Werte von H in der Mitte zwischen den benachbarten Gitterpunkten $k \pm 1$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (22)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2}. \quad (23)$$

Formal erhält man diese Darstellung, indem man die Werte der Funktion f an den Stellen $x_i + \Delta x \equiv x_{i+1}$ und $x_i - \Delta x \equiv x_{i-1}$ durch zwei Taylorreihen um x_i approximiert, welche nach der ersten bzw. zweiten Ordnung abgebrochen und anschließend subtrahiert bzw. addiert werden. Zeige dies.

Wir wollen nun die Gleichung (9) mit Hilfe zentrierter Differenzen darstellen. Zunächst schreiben wir sie um zu:

$$(G\psi_y)_y + (H\psi_z)_z = F \quad (24)$$

mit $G(z) = N^2/\rho_0$ und $H(z) = f^2/\rho_0$.

Bei der Darstellung des Terms $(H\psi_z)_z$ mit Hilfe zentrierter Differenzen erweist es sich als geschickt, nicht stur nach den Gleichungen (22) und (23) vorzugehen, sondern stattdessen Abbildung (3) zur Hilfe zu nehmen. Anhand der Abbildung gilt:

$$(H\psi_z)_{k+1/2} = H_{k+1/2} \frac{\partial\psi}{\partial z} \Big|_{k+1/2} = H_{k+1/2} \frac{\psi_{k+1} - \psi_k}{\Delta z} \quad \text{am Punkt } k + 1/2, \quad (25)$$

$$(H\psi_z)_{k-1/2} = H_{k-1/2} \frac{\partial\psi}{\partial z} \Big|_{k-1/2} = H_{k-1/2} \frac{\psi_k - \psi_{k-1}}{\Delta z} \quad \text{am Punkt } k - 1/2, \quad (26)$$

wobei hier zunächst nur die z -Richtung betrachtet wird. $H_{k+1/2}$ bezeichnet den Wert von H zwischen den Punkten H_k und H_{k+1} und kann durch lineare Interpolation $H_{k+1/2} = (H_k + H_{k+1})/2$ bestimmt werden. Für $(H\psi_z)_z$ ergibt sich mit (25) und (26):

$$(H\psi_z)_z \Big|_k = \frac{1}{\Delta z} \left(H_{k+1/2} \frac{\psi_{k+1} - \psi_k}{\Delta z} - H_{k-1/2} \frac{\psi_k - \psi_{k-1}}{\Delta z} \right). \quad (27)$$

Für die inneren Gitterpunkte erhalten wir damit (zeige dies!) folgende finite Differenzenform der Gleichung (9):

$$G_{j,k} \frac{\psi_{j+1,k} - 2\psi_{j,k} + \psi_{j-1,k}}{(\Delta y)^2} + H_{j,k+1/2} \frac{\psi_{j,k+1} - \psi_{j,k}}{(\Delta z)^2} - H_{j,k-1/2} \frac{\psi_{j,k} - \psi_{j,k-1}}{(\Delta z)^2} = F_{j,k}. \quad (28)$$

Um ein Standardverfahren zur Lösung der Gleichung (28) anwenden zu können, ist es praktisch, sie vorher in folgende prototypische Differenzenform für elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung umzuformen (vgl. Aufgabe (iii), Abschnitt 5.2):

$$A_{j,k}\psi_{j+1,k} + B_{j,k}\psi_{j-1,k} + C_{j,k}\psi_{j,k+1} + D_{j,k}\psi_{j,k-1} + E_{j,k}\psi_{j,k} = F_{j,k}. \quad (29)$$

Das sogenannte *SOR* (*Successive Over Relaxation*) Verfahren zur Lösung dieser Gleichung, welches im Rahmen der vorliegenden Übung verwendet wird, wird im Anhang A1 kurz beschrieben.

5 Das Fortran-90 Programm und sein Output

5.1 Getting Started

Bei dem Fortran Programm “**eliassen**” handelt es sich im wesentlichen um ein Programm zur numerischen Lösung der Gleichung (9). Um den Aufwand bei der Programmierung zu verringern, aber gleichzeitig dennoch Deinen Lernerfolg zu fördern, bekommst Du den Torso des Programmes, welchen Du vervollständigen sollst. Die Anleitung dazu befindet sich teilweise in der Datei mit dem Quellcode.

Kopiere bitte zunächst das Programm in Dein Heimatverzeichnis auf **linux1** oder **linux2**, z.B mit Hilfe folgender Befehle:

```
> cp /data/groups08/18IPA/borth/Eliassen/eliassen.tar .
> tar -xvf eliassen.tar
> cd eliassen
```

Die Datei mit dem Quellcode heißt **eliassen.f90** und kann z.B. mit dem Editor **xemacs** geöffnet werden.

5.2 Aufgaben

(i) Lies Dir den Quellcode durch und erstelle ein Diagramm des Programmverlaufes, in welchem zu sehen ist, was in welcher Reihenfolge zwischen den Zeilen `PROGRAM eliassen` und `END PROGRAM eliassen` passiert, das heißt: Wo werden die Felder definiert, wo geschieht die Initialisierung, wo die eigentliche Rechnung, wo werden die Ergebnisse geplottet?

(ii) Lies den Quellcode bis zu der Stelle, an der die Koordinaten definiert werden sollen. Definiere die Koordinaten mit Hilfe der Beschreibung in Abschnitt 4. Um sicherzugehen, dass Du die Koordinaten richtig definiert hast, füge z.B. den FORTRAN Befehl `PRINT *,zkm` in Dein Programm vor dem `STOP` Befehl ein. Übersetze das Programm, indem Du `make` eingibst. Bei der Eingabe von `eliassen` wird das Programm ausgeführt. Entferne den `STOP` Befehl.

(iii) Als erstes soll das Eliassen-Problem mit einer diabatischen Heizung betrachtet werden (ohne Reibung). Um wahlweise mit Heizung oder Reibung arbeiten zu können, wurden im Programm zwei Schalter eingebaut: `q_flag` für den Heizterm und `xr_flag` für den Reibungsterm. Für diese Aufgabe soll `q_flag = 1` und `xr_flag = 0` sein, das heißt, dass die Heizung eingeschaltet, die Reibung aber ausgeschaltet ist. Ergänze das Unterprogramm, welches die Heizung Q entsprechend Gleichung (13) initialisiert. Betrachte die Definition der Subroutine und ihren Aufruf: Welche Variablen werden aus dem Hauptprogramm in die Subroutine übergeben, welche gibt die Subroutine dem Hauptprogramm als Ergebnis wieder zurück? Stelle Q graphisch dar. Suche (`strg s` in emacs) dazu die Stelle, an der das Unterprogramm `CPLOT` zum ersten Mal aufgerufen wird und füge davor einen Aufruf von `CPLOT` ein. Nachdem Du das Programm übersetzt und ausgeführt hast, sieh Dir mit Hilfe des UNIX Befehls `idm gmeta` einen Konturenplot von Q an.

(iv) Lies Dir den Rest des Hauptprogramms aufmerksam durch. Bestimme die Koeffizienten in (29) anhand von (28) und vervollständige das Unterprogramm `SORCOEFF`. Warum läuft der Index j in diesem Program von 2 bis $jj - 1$?

(v) Entferne die Kommentarzeichen in den Aufrufen der Unterprogramme `SORCOEFF`, `SOR` und `CPLOT`(Stromfunktion). Übersetze das Programm mit `make`. Vergleiche die numerische Lösung mit der in Abschnitt 3.1 von Dir berechneten analytischen Lösung.

(vi) Berechne die Geschwindigkeitskomponenten v und w aus der Massenstromfunktion nach (7) und (8). Füge den Code dazu unterhalb der Zeile "*Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten*" im Programm `eliassen.f90` ein. Tip: nutze ein vorhandenes Unterprogramm und schreibe ein neues. Stelle v und w mit Hilfe des Unterprogramms `CPLOT` graphisch dar.

6 Vorschläge für Modellstudien

Im folgenden werden Dir einige Anregungen zu möglichen Modellstudien gegeben. Deiner Phantasie sind jedoch keine Grenzen gesetzt, und falls Du eigene Vorschläge hast, solltest Du sie unbedingt ausprobieren. Natürlich sind auch Fragen zu Deinen eigenen Vorschlägen willkommen. Bevor Du loslegst, erstelle bitte auf jeden Fall eine Sicherheitskopie des Programms z.B. mittels `cp eliassen.f90 eliassen.f90.bak`, die Dir hilft Dein Programm wieder in den Ausgangszustand zu versetzen, falls etwas schief gehen sollte.

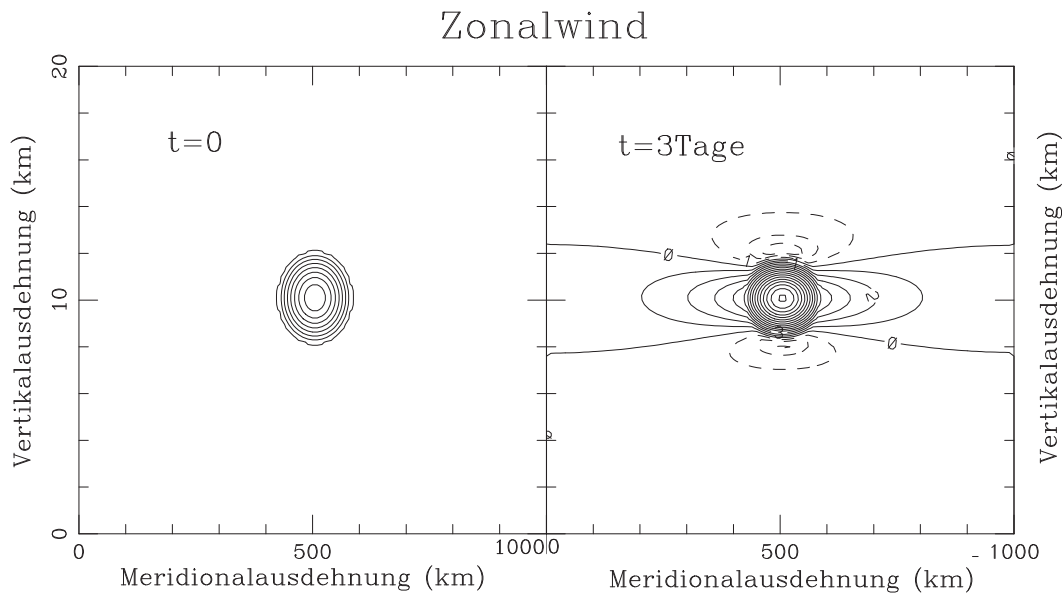


Abbildung 4: Zonalwind zur Zeit $t=0$ (links) und $t=3\text{Tage}$ (rechts) für den Fall aus der 3. Studie mit Rayleigh-Reibung. Die Konturenintervalle betragen 5ms^{-1} links und 1ms^{-1} rechts.

6.1 Modellstudien mit diabatischer Heizung

1. Studie

In allen folgenden Studien sei die Dichte als Funktion der Höhe durch $\rho_0(z) = \rho_{00} \exp(-z/H)$ gegeben. Hier sei zunächst wieder $X(y, z) = 0$ und $Q(y, z) = Q_0 \cos ly \sin mz$. Berechne zusätzlich zu ψ , v und w die zeitlichen Tendenzen der Temperatur $\partial T/\partial t$ und des Grundstromes $\partial u/\partial t$ und stelle diese als Konturenplots dar. Wie ändert sich ψ durch die Angabe des vertikalen Dichteprofiles? Wieso ändert sich der Grundstrom zeitlich?

2. Studie

Wiederhole die erste Studie wobei dieses Mal

$$Q(y, z) = Q_0 \exp \left[- \left(\frac{y - y_0}{\Delta_1} \right)^2 - \left(\frac{z - z_0}{\Delta_2} \right)^2 \right] \quad (30)$$

mit $Q_0 = 10 \text{ K/Tag}$, $y_0 = L/2$, $z_0 = M/2$, $\Delta_1 = L/10$ und $\Delta_2 = M/10$. Dabei ist L die horizontale und M die vertikale Ausdehnung des Modellgebiets. Stelle eventuell $F(y, z)$ als Konturenplot graphisch dar. Hättest Du z.B. mit Hilfe der thermischen Windgleichung (6) anhand des Konturenplots von $\partial T/\partial t$ bereits vorraussagen können, wie $\partial u/\partial t$ ungefähr vom Ort abhängt?

3. Studie

Variiere den Coriolisparameter und die Skalenhöhe, um den Einfluß dieser beiden Parameter auf die Sekundärzirkulation zu untersuchen. Sieh Dir an, wie diese beiden Parameter in Gleichung (9) eingehen und mache Dir das numerische Ergebnis plausibel.

6.2 Modellstudien mit Rayleigh-Reibung, zeitliche Entwicklung

Für die Modellstudien mit der Rayleigh-Reibung soll die Heizung im Programm nicht vorhanden sein. Dazu setze den Schalter `q_flag` auf 0, den Schalter für die Reibung `xr_flag`

auf 1. Beachte bei Deiner weiteren Programmierung, dass auf der rechten Seite der Poisson-Gleichung im Programm bisher nur der Heizterm steht. Wenn Du eine neue Subroutine für die Reibung schreibst, dann achte weiterhin darauf, welche Variablen in die Subroutine eingehen und welche dem Hauptprogramm zurück gegeben werden und achte dabei streng auf die Reihenfolge!

1. Studie

Betrachte einen idealisierten zonalen Grundstrom

$$u(y, z) = \begin{cases} u_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}r\right), & \text{falls } r \leq 1, \\ 0, & \text{falls } r > 1. \end{cases} \quad (31)$$

mit

$$r = \sqrt{\left(\frac{y - y_0}{\Delta_1}\right)^2 + \left(\frac{z - z_0}{\Delta_2}\right)^2} \quad (32)$$

und $u_0 = 40 \text{ ms}^{-1}$, $y_0 = L/2$, $z_0 = M/2$, $\Delta_1 = 80 \text{ km}$ und $\Delta_2 = 2 \text{ km}$. Betrachte eine Situation ohne Heizung, d.h. $Q(y, z) = 0$, aber mit einer Dämpfung des Zonalimpulses gemäß

$$X(y, z) = -\frac{u(y, z)}{\tau}, \quad (33)$$

wobei $\tau = 2$ Tage. Erhöhe die vertikale Ausdehnung des Modellgebiets auf 20 km. Setze außerdem $jmax = kmax = 80$. Berechne wieder ψ , v , w , $\partial T/\partial t$, $\partial u/\partial t$ und interpretiere die zugehörigen Konturenplots. Wie ändert sich die Sekundärzirkulation, falls $f = -1 \cdot 10^{-4}$? Inwiefern ist die numerische Lösung dieses Problems konsistent mit der analytischen Lösung des Problems aus Abschnitt 3.2?

2. Studie

Nimm an, daß N wie folgt von der Höhe abhängt:

$$N(z) = \begin{cases} 1 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}, & \text{falls } z \leq 12 \text{ km}, \\ 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}, & \text{falls } z > 12 \text{ km}. \end{cases} \quad (34)$$

Was bedeutet eine Erhöhung des von N ab einer bestimmten Höhe physikalisch? Wie verändert sich die Sekundärzirkulation?

3. Studie

Jetzt soll die zeitliche Entwicklung des Grundstroms unter dem Einfluß der Rayleigh Reibung untersucht werden. Führe dazu eine numerische Zeitintegration der Gleichung (11): $u_t = fv + X$ durch. Zur Diskretisierung verwende wieder die Methode der finiten Differenzen, diesmal allerdings soll die Zeit und nicht der Raum diskretisiert werden. Betrachte zunächst alle Variablen zu diskreten Zeitpunkten $t_n = n\Delta t$, $n = 0, 1, \dots, N$. Die Größe Δt heißt *Zeitschritt* und gibt den zeitlichen Abstand, also die Zeitspanne zwischen zwei diskreten Zeitpunkten an, zu denen die Werte der Modellvariablen berechnet werden. Um aus den Werten von u zum Zeitpunkt t_n die Werte von u zum Zeitpunkt t_{n+1} mittels der prognostischen (d.h. zeitabhängigen) Gleichung (11) zu berechnen, wähle folgende Diskretisierung von (11):

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = (fv + X)^n \quad (35)$$

oder

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t(fv^n - X^n), \quad (36)$$

wobei der hochgestellte Index n angibt, daß eine Variable zum Zeitpunkt t_n gegeben ist. Diese Diskretisierung heißt *Euler-Vorwärts* Verfahren und ist das allereinfachste Zeitschrittverfahren.

Hast Du die Werte von u zum Zeitpunkt $n + 1$ nach (36) berechnet, so kannst Du mit den neuen Werten erneut X nach (33) berechnen um erneut eine Stromfunktion zu berechnen und daraus Werte von u und v , die Du dann wieder in (36) einsetzt usw. Wähle $\Delta t = 1$ h und führe obige Schritte von $t_{Anfang} = 0$, bis $t_{Ende} = 3$ Tage durch. Überlege Dir gut, an welcher Stelle im FORTRAN Programm Du die Zeitschleife anfangen und wo Du sie enden läßt. Die Frequenz N sei wieder höhenkonstant: $N = 1 \cdot 10^{-2} \text{s}^{-1}$.

Vergleiche die numerische Lösung mit der analytischen Lösung von $u_t = -u/\tau$. Letzteres wäre die Gleichung für die Entwicklung des Windes unter der Wirkung von Rayleigh-Reibung $X = -u/\tau$ für der Fall, daß man die Wirkung der Querkirkulation (d.h. den Term f_v) vernachlässigen könnte.

Bemerkung: Das Euler-Vorwärts Verfahren ist zur zeitlichen Diskretisierung nicht in allen Fällen geeignet. Siehe dazu z.B. *Numerical Recipes*, Kapitel 19.1.

7 Anhang A: Kurze Beschreibung des SOR Verfahrens

Gleichung (29) wird iterativ gelöst. Ausgehend von einer beliebigen Stromfunktion $\psi_{i,k}$ im Inneren des Modellgebietes kann man eine neue Stromfunktion $\psi_{j,k}^*$ mit (29) wie folgt berechnen:

$$\psi_{j,k}^* = \frac{1}{E_{j,k}} (F_{j,k} - A_{j,k}\psi_{j+1,k} - B_{j,k}\psi_{j-1,k} - C_{j,k}\psi_{j,k+1} - D_{j,k}\psi_{j,k-1}). \quad (37)$$

Im Prinzip könnte man die neue Stromfunktion ψ^* wieder auf der rechten Seite in (37) einsetzen, und diesen Schritt so oft wiederholen, bis das Residuum

$$\xi_{j,k} = A_{j,k}\psi_{j+1,k} + B_{j,k}\psi_{j-1,k} + C_{j,k}\psi_{j,k+1} + D_{j,k}\psi_{j,k-1} + E_{j,k}\psi_{j,k} - F_{j,k}. \quad (38)$$

kleiner als ein vorgegebener Schwellenwert wird. Es stellt sich jedoch heraus, daß dieses Verfahren sehr langsam konvergiert. Ein Verfahren, welches unter gewissen Voraussetzungen wesentlich schneller konvergiert, ist das sogenannte *Successive Over Relaxation (SOR)* Verfahren. Die Iterationsvorschrift beim SOR Verfahren lautet:

$$\begin{aligned} \psi_{j,k}^{r+1} &= \psi_{j,k}^r + \omega (\psi_{j,k}^* - \psi_{j,k}^r) \\ &= \psi_{j,k}^r + \omega \frac{\xi_{j,k}^r}{E_{j,k}} \end{aligned} \quad (39)$$

wobei der hochgestellte Index r den Iterationsschritt angibt und ω den *Relaxationsparameter* bezeichnet. Das Verfahren konvergiert für $0 < \omega < 2$. Falls $1 < \omega < 2$ spricht man von Überrelaxation. Das Konvergenzverhalten des Verfahrens hängt stark von der optimalen Wahl von ω ab. (Du kannst dies einfach nachprüfen, indem Du den Jacobi-Radius, von dem ω abhängt, in Deinem FORTRAN Programm auf verschiedene feste Werte zwischen null und eins setzt). Eine Schwierigkeit bei der Anwendung des SOR Verfahrens entsteht dadurch, daß der optimale Wert von ω nur für einige spezielle Probleme analytisch bestimmt werden kann. Eine ausführlichere Beschreibung der SOR Methode findest Du z.B. in den *Numerical Recipes*, Kapitel 19.5.

8 Literatur

Eliassen, A., 1952: Slow thermally or frictionally controlled meridional circulation in a circular vortex. *Astrophys. Norv.*, **5**, No 2, 19–60.

Gill, A. E., 1982: *Atmosphere–Ocean Dynamics*. Academic Press, New York, 662 pp.

Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, 1992: *Numerical recipes in FORTRAN: the art of scientific computing*. 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 963 pp.