INTERNE SCHWEREWELLEN

Ein numerischer Praktikumsversuch zur vertikalen Ausbreitung hydrostatischer interner Schwerewellen

Volkmar Wirth und Hartmut Borth

Universität Mainz

Januar 2002

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Eine große und wichtige Klasse atmosphärischer Strömungen läßt sich in guter Näherung als "Wellen" beschreiben. Solche Wellen sind kleine Schwingungen um einen stabilen Grundzustand. Betrachtet man die vollständigen Grundgleichungen für die atmosphärische Dynamik, so erkennt man, daß es eine Vielzahl von stabilen stationären Grundzuständen gibt, die auf einem breiten räumlichen und zeitlichen Frequenzspektrum durch unterschiedlichste Mechanismen zu Schwingungen angeregt werden können. Beispiele sind Schallwellen, Schwerewellen, Rossbywellen und deren Überlagerungen. Allen Wellen gemein ist die Existenz einer "Rückstellkraft", d.h. eines Mechanismus, welcher dafür sorgt, daß ein Teilchen, welches aus seiner Ruhelage ausgelenkt wurde, wieder in diese Ruhelage zurückbewegt wird. Je nachdem wie diese Rückstellkraft zustande kommt, liegen den Wellen unterschiedliche physikalische Mechanismen zugrunde. Im vorliegenden Praktikumsversuch werden Schwerewellen untersucht, bei denen die Rückstellkraft durch die Erdanziehungskraft vermittelt wird. Genauer gesagt erfährt ein Teilchen in einer stabil geschichteten Atmosphäre eine nach unten (oben) gerichtete Auftriebskraft, wenn es nach oben (unten) ausgelenkt wird (Prinzip von Archimedes).

2 Modell

2.1 Modellannahmen und Grundgleichungen

Betrachte hydrostatische Strömung in einer stabil geschichteten Atmosphäre ohne planetare Rotation ($f = 0$). Weiter nehmen wir an, daß das Problem unabhängig von y ist, also durch die Symmetrie $\partial/\partial y = 0$ gekennzeichnet ist. Als Vertikalkoordinate wird

$$z = -H \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \tag{1}$$

verwendet, wobei p den Druck bezeichnet, $H = 7.5$ km eine konstante mittlere Skalenhöhe ist und $p_0 = 1000$ hPa ein konstanter Referenzdruck. Unter diesen Annahmen reduzieren sich die primitiven Gleichungen zu

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + X \ , \tag{2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{g}{T_0} T \ , \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 w) = 0 \ , \tag{4}$$

$$\frac{DT}{Dt} + \frac{\kappa}{H} T w = Q_d \ . \tag{5}$$

Hierbei sind u und w der Wind in x- und z-Richtung, Φ das Geopotential, T die Temperatur sowie X und Q_d nichtkonservative Terme, also Quellen oder Senken von Zonalimpuls und Wärme. Die vier gesuchten Größen (u, w, Φ, T) hängen von x, z und der Zeit t ab. Weiter sind $D/Dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x + w\partial/\partial z$ die materielle Ableitung, $g = 10$ m s^{-2} die Schwerebeschleunigung, $T_0 = 300$ K eine konstante Referenztemperatur, $\kappa = R/c_p = 2/7$, R die Gaskonstante für trockene Luft und c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck. Die vertikale Dichteverteilung ist durch

$$\rho_0(z) = \frac{p(z)}{gH} = \rho_{00}\, e^{-z/H} \tag{6}$$

gegeben mit der Konstanten $\rho_{00} = p_0/(gH)$.

2.2 Linearisierung um einen Grundzustand

Im Folgenden denken wir uns die Strömung zerlegt in einen stationären Grundzustand und kleine Abweichungen davon,

$$u = \bar{u}(z) + u', \quad T = \bar{T}(z) + T', \quad w = 0 + w' \quad \text{und} \quad \Phi = \bar{\Phi} + \Phi', \tag{7}$$

wobei $\bar{\Phi}$ durch die Beziehung $d\bar{\Phi}/dz = g\bar{T}/T_0$ gegeben ist. Weiter seien die Dämpfungs- und Anregungsterme X und Q_d wie folgt definiert

$$X = -\alpha(u - \bar{u}) + X^{\text{ext}}\ , \tag{8}$$

$$Q_d = -\alpha(T - \bar{T}) + Q_d^{\text{ext}}\ , \tag{9}$$

wobei α eine Dämpfungsrate ist. Beachte, daß hier angenommen wird, daß die Dämpfung der Störung von Zonalimpuls und Wärme mit der gleichen Rate geschieht.

Setzten wir nun die Zerlegung in die reduzierten primitiven Gleichungen (2, 3, 4 und 5) ein und vernachlässigen wir Terme, in denen Produkte von Störgrößen vorkommen, so erhalten wir folgende linerarisierte Gleichungen für die Störgrößen u', w', T' und Φ'

$$u'_t + \alpha u' + \bar{u}u'_x + w'\bar{u}_z = -\Phi'_x + X^{\text{ext}}\ , \tag{10}$$

$$\Phi'_z = \frac{g}{T_0}T'\ , \tag{11}$$

$$u'_x + \rho_0^{-1}(\rho_0 w')_z = 0\ , \tag{12}$$

$$T'_t + \alpha T' + \bar{u}T'_x + w'\bar{S} = Q_d^{\text{ext}}\ . \tag{13}$$

Hierbei ist $\bar{S}(z) = (\bar{T}_z + \kappa\bar{T}/H)$; eine Koordinate als Subindex bezeichnet die partielle Differentiation nach dieser Koordinaten.

2.3 Wellenlösungen und Reduktion der Gleichungen auf eine vertikale Strukturgleichung

Weiter machen wir den Separationsansatz

$$u'(x,z,t) = \hat{u}(z)\, e^{ik(x-ct)} \tag{14}$$

(und analog für w', Φ', T', X^{ext} und Q_d^{ext}), das heißt wir zerlegen die Störgrößen in einen zeitunabhängigen vertikalen Anteil und einen harmonischen zeitabhängigen Horizontalanteil, wobei auf der rechten Seite implizit der Realteil gemeint ist, d.h. $u' = \Re\{\hat{u}\ \exp[ik(x-ct)]\}$, und die gehuteten Größen komplex sein dürfen.

Die horizontale Wellenzahl sei o.B.d.A. $k > 0$; sie steht mit der horizontalen Wellenlänge via $\lambda_{(x)} = 2\pi/k$ in Verbindung. Wählt man k so, daß $\lambda_{(x)} = 100$ km ist und geht man mit dem Separationsansatz in die Gleichungen für die Störgrößen, erhält man folgendes zeitunabhängiges Gleichungssystem für die vier komplexen Funktionen (Amplituden) $\hat{u}(z)$, $\hat{w}(z)$, $\hat{\Phi}(z)$ und $\hat{T}(z)$

$$-ik(\hat{c}-\bar{u})\hat{u} + \bar{u}_z\hat{w} + ik\hat{\Phi} = \hat{X}^{\text{ext}} , \tag{15}$$

$$ik\hat{u} + \hat{w}_z - H^{-1}\hat{w} = 0 , \tag{16}$$

$$\hat{\Phi}_z = gT_0^{-1}\hat{T} , \tag{17}$$

$$-ik(\hat{c}-\bar{u})\hat{T} + \bar{S}\hat{w} = \hat{Q}_d^{\text{ext}} . \tag{18}$$

Hierbei ist $\hat{c} = c + i\alpha/k$ (also $\Re\hat{c} = c$ und $\Im\hat{c} = \alpha/k$).

Eliminieren wir durch Linearkombination $\hat{u}$ aus (15) und (16), ferner $\hat{T}$ aus (17) und (18), so erhalten wir zwei Gleichungen aus denen man durch Differentiation nach z und Linearkombination wiederum $\hat{\Phi}$ eliminieren kann, was schließlich auf eine einzelne Gleichung für die Amplitude $\hat{w}$ der Vertikalgeschwindigkeit führt

$$\hat{w}_{zz} - \frac{\hat{w}_z}{H} + \left[\frac{\bar{N}^2}{(\bar{u}-\hat{c})^2} - \frac{\bar{u}_{zz} + H^{-1}\bar{u}_z}{\bar{u}-\hat{c}}\right]\hat{w} = \hat{F} , \tag{19}$$

wobei $\bar{N}^2 = gT_0^{-1}\bar{S}$ und

$$\hat{F} = \frac{gT_0^{-1}\hat{Q}_d^{\text{ext}}}{(\bar{u}-\hat{c})^2} - \frac{\hat{X}_z^{\text{ext}}}{\bar{u}-\hat{c}} \tag{20}$$

ist.

Mit dem Ansatz

$$\hat{w}(z) = e^{\frac{z}{2H}}\tilde{w}(z) \tag{21}$$

können wir die Gleichung (19) weiter vereinfachen und erhalten schließlich die *vertikale Strukturgleichung*

$$\boxed{\tilde{w}_{zz} + Q^2\tilde{w} = \tilde{F}} . \tag{22}$$

Dabei ist

$$Q^2(z) = \frac{\bar{N}^2}{(\bar{u}-\hat{c})^2} - \frac{\bar{u}_{zz} + H^{-1}\bar{u}_z}{\bar{u}-\hat{c}} - \frac{1}{4H^2} \tag{23}$$

der sogenannte "*Scorer-Parameter*" und

$$\tilde{F}(z) = e^{-\frac{z}{2H}}\hat{F} . \tag{24}$$

Es darf im folgenden angenommen werden, daß überall $c \neq \bar{u}(z)$ gilt und daß ferner $|c-\bar{u}|$ so klein ist, daß

$$\frac{\bar{N}^2}{(c-\bar{u})^2} - \frac{1}{4H^2} > 0 \tag{25}$$

gilt. Dies ist in der Erdatmosphäre praktisch immer erfüllt (warum?).

3 Lösung und Untersuchung der vereinfachten Gleichungen mit analytischen Methoden

3.1 Dispersionsrelation, Gruppengeschwindigkeit und Abstrahlrandbedingung

Nehmen wir an, daß $\bar{u} = const$, $\bar{T} = const$, $\hat{F} = 0$ und $\alpha = 0$ ist, so folgt, daß der Scorer-Parameter Q^2 in der vertikalen Strukturgleichung (22) konstant ist und der Ansatz

$$\tilde{w}(z) = \tilde{w}_0 \, e^{imz} \tag{26}$$

mit $\tilde{w}_0 = const$ auf eine Lösung von (22) führt, falls die Relation

$$m^2 = Q^2 = \frac{\bar{N}^2}{(\bar{u}-c)^2} - \frac{1}{4H^2} \tag{27}$$

erfüllt ist. Durch Wurzelziehen erhält man daraus (bis auf das Vorzeihen, mehr dazu später) das gesuchte m. Man erhält daraus mit $\omega = kc$ die *Dispersionsrelation*

$$\boxed{(\omega - k\bar{u})^2 = \frac{\bar{N}^2 k^2}{m^2 + \frac{1}{4H^2}}}\,. \tag{28}$$

Durch Ableiten dieser Gleichung nach m erhält man die *Gruppengeschwindigkeit* in vertikaler Richtung

$$\boxed{c_{gz} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial m} = +\frac{mk}{\bar{N}^2}\,(\bar{u}-c)^3}\,. \tag{29}$$

Das Vorzeichen von c_{gz} zeigt die Ausbreitungsrichtung der Welle (genauer: der Wellenaktivität) an. Erinnere Dich, daß $k > 0$ gilt. Die Beziehung (29) besagt, daß sich die Wellen nach oben (nach unten) ausbreiten, wenn das Vorzeichen von m gleich (entgegengesetzt) dem Vorzeichen von $(\bar{u} - c)$ ist.

Bei der numerischen Behandlung stellt der obere Begrenzungsrand des (numerischen) Definitionsbereichs ein gewisses Problem dar. Die Atmosphäre hat nämlich überhaupt keine obere Begrenzung. Der Trick besteht darin, eine obere Randbedingung so festzulegen, daß damit eine Situation mit unendlich hoher Atmosphäre simuliert wird. Eine solche Randbedinung nennt man *Ausstrahlrandbedingung*. Gleichung (29) kann benutzt werden, um eine solche Ausstrahlbedingung festzulegen. Dazu wird angenommen, daß in der Umgebung des oberen Randes $\hat{F} = 0$, $\alpha = 0$, $\bar{u} = const$ und $\bar{T} = const$ ist. Es gelten dann die Ergebnisse vom vorigen Absatz. Lokal verhält sich die Lösung also wie (26). Man will, daß am oberen Rand $c_{gz} > 0$ gilt. Gemäß (29) muß man daher am oberen Rand als m diejenige Wurzel von Q^2 wählen, deren Realteil das gleiche Vorzeichen wie $(\bar{u} - c)$ hat.

Die Lösung, welche der so gewählten Randbedingung entspricht, hat die folgende Eigenschaft. Bei Berücksichtigung einer (geringen) Dämpfung ist sie im Vergleich zur ungedämpften Lösung "etwas schwächer", d.h. das Wachstum der Amplitude von $\hat{w}$ mit der Höhe fällt etwas geringer aus als im ungedämpften Fall. Dies sieht man wie folgt. Nimmt man an, daß die Dämpfung schwach ist, d.h. daß α so klein ist, daß $|\Im\hat{c}| \ll |\bar{u} - c|$ gilt, dann folgt aus (27) mit $\hat{c}$ anstelle von c, daß

$$Q^2 \approx \left[\frac{\bar{N}^2}{(\bar{u}-c)^2} - \frac{1}{4H^2}\right] + 2i\bar{N}^2 \frac{\Im\hat{c}}{(\bar{u}-c)^3} \tag{30}$$

gilt. Für $\bar{u} - c > 0$ erfordert die Ausstrahlbedingung, daß (im Falle verschwindender Dämpfung) diejenige Wurzel $Q_\diamond$ zu nehmen ist, deren Realteil positiv ist. Gemäß (30) hat $Q_\diamond$ einen (kleinen) positiven Imaginärteil. Man hat also $m = a + ib$ mit $a > 0$ und $b > 0$. Gemäß dem Ansatz (26) liefert dies eine exponentielle Dämpfung für $\tilde{w}$. Für $\bar{u} - c < 0$ hingegen erfordert die Ausstrahlbedingung, daß (im Falle verschwindender Dämpfung) diejenige Wurzel zu nehmen ist, deren Realteil negativ ist. Gemäß (30) hat jedoch auch diese Wurzel einen *positiven* Imaginärteil. Man hat also $m = a + ib$ mit $a < 0$ und $b > 0$. Gemäß dem Ansatz (26) liefert dies also wieder eine exponentielle Dämpfung für $\tilde{w}$.

3.2 Vertikaler Fluß von Zonalimpuls

Der Fluß von Zonalimpuls in vertikaler Richtung ist wie folgt gegeben

$$F_m = \rho_0 \, \overline{u'w'} \,, \tag{31}$$

wobei der Querstrich die Mittelung über eine Periode in x-Richtung bezeichnet.

Setzen wir die Definition für die vertikale Dichteverteilung (6) ein, erhalten wir mit der Periode L und $u'(x,z,t) = \exp(z/2H)\;\tilde{u}(z)\;\exp[i(kx - ct)]$ das Integral

$$F_m = \frac{\rho_{00}}{L} \int_0^L \Re[\tilde{u}\; e^{i(kx-ct)}]\; \Re[\tilde{w}\; e^{i(kx-ct)}]\; dx \;. \tag{32}$$

Ausmultiplizieren und Integrieren ergibt

$$F_m = \frac{\rho_{00}}{2}\, \Re(\tilde{u}\tilde{w}^*) \,, \tag{33}$$

wobei der hochgestellte Stern für die komplexe Konjugation steht (benutze $2\,\Re(a) = a + a^*$). Aus der Kontinuitätsgleichung (16) ergibt sich die Beziehung

$$\tilde{u} = \frac{i}{k}\left(\tilde{w}_z - \frac{\tilde{w}}{2H}\right) \,, \tag{34}$$

aus der zusammen mit (33) ein Ausdruck folgt

$$F_m(z) = \frac{\rho_{00}}{2k}\, \Im(\tilde{w}_z^* \tilde{w}) \,, \tag{35}$$

der nur noch von der Amplitude der Vertikalgeschwindigkeit abhängt.

Betrachten wir den Spezialfall $\bar{T} = const$, $\bar{u} = const$ und $\alpha = 0$ mit Deckelrandbedingung, d.h. $\tilde{w}(z_{\mathrm{top}}) = 0$ am oberen Rand, dann verschwindet dort gemäß (35) der Vertikaltransport von Zonalimpuls, während man für die Ausstrahlrandbedingung ($\tilde{w}_z = iQ_\diamond \tilde{w}$) am Oberrand die Beziehung $F_m = -Q_\diamond |\tilde{w}|^2 \rho_{00}/(2k)$ erhält. Daraus folgt, daß das Vorzeichen von F_m gleich dem von $(c - \bar{u})$ ist. Im Spezialfall von stationären Wellen (d.h. $c = 0$) hat man abwärtsgerichteten Impulsfluß bei Westwind und aufwärtsgerichteten Impulsfluß bei Ostwind. (Zur Erklärung können wir die Eliassen-Palm Fluß Theoreme oder die unten für unseren Spezialfall abgeleitete Beziehung (37) benutzen).

Es ist interessant, sich die Änderung des Impulsflusses mit der Höhe anzusehen. Eine entsprechende Beziehung kann man wie folgt herleiten. Ableiten von (35) nach z liefert zunächst

$$\frac{\partial F_m}{\partial z} = -\frac{\rho_{00}}{2k}\, \Im(\tilde{w}_{zz} \tilde{w}^*) \;. \tag{36}$$

Unter Zuhilfename von (22) folgt daraus

$$\frac{\partial F_m}{\partial z} = \frac{\rho_{00}}{2k}\left[|\tilde{w}|^2\,\Im(Q^2) - \Im(\tilde{F}\tilde{w^*})\right] . \tag{37}$$

Insbesondere folgt für konservative Wellen ($\alpha = 0$), daß der Impulsfluß außerhalb des Anregungsgebietes höhenkonstant ist, d.h. $\partial F_m/\partial z = 0$ wo $\hat{F} = 0$.

4 Das numerische Modell

Zur Untersuchung einiger grundlegender Eigenschaften von internen Schwerewellen soll jetzt zusätzlich ein Fortan 90 Programm benutzt werden. Nach verschiedenen analytischen Umformungen haben wir die linearisierten Gleichungen (10), (11), (12) und (13) auf eine einzige Gleichung, die vertikale Strukturgleichung (22) reduziert. Das Program löst numerische eine diskretisierte Form dieser Strukturgleichung, d.h. es berechnet $\tilde{w}$ auf einem regelmäßigen, Gitter. Daraus werden dann verschiedene andere Größen berechnet und dargestellt.

Zur konkreten Lösung des Problems müssen nun der Definitionsbereich, die Anzahl der Gitterpunkte N, die Randbedingungen am oberen und unteren Rand, der sogenannte Scorer-Parameter Q^2 (vgl. (23)) und der Anregungsterm $\tilde{F}$ (vgl. (24)) festgelegt werden. Im Einzelnen sieht das wie folgt aus:

Definitionsbereich und Randbedingungen

- Festlegung der Anzahl der Gitterpunkte N.
- Festlegung der Höhe des Definitionsbereiches z_{top}.
- Festlegung der Randbedingungen am Boden $\tilde{w}(0) = 0$ für flachen Boden und $\tilde{w}(0) = w_{\mathrm{bot}} = const$ für eine sinusförmige Topographie.
- Festlegung der Randbedingungen am oberen Rand $\tilde{w}(z_{\mathrm{top}}) = 0$ bei einer Deckelrandbedngung (LID) und $\tilde{w}_z = iQ_\diamond\tilde{w}$ bei einer Ausstrahlrandbedingung (RAD).

Scorer-Parameter Q

- Festlegung der Profile $\bar{u}(z)$ und $\bar{N}^2(z)$ des Grundzustandes.

  In der ersten Serie von Experimenten mit höhenkonstantem Grundzustand sind $\bar{u}$ und $\bar{N}^2$ jeweils Konstanten. In der zweiten Serie von Experimenten sind Grundstrom und Brunt-Väisälä Frequenz z-abhängig und durch Familien von Funktionen, die in den jeweiligen Aufgaben nochmals besprochen werden festgelegt. Im Fall von variabler Brunt-Väisälä Frequenz hängt $\bar{N}^2(z)$ von den 4 Parametern $\bar{N}_1^2$, $\bar{N}_2^2$, z_0 und δz ab und ist durch das Profil

  $$\bar{N}^2(z) = \bar{N}_1^2 + \mathcal{T}(z, z_0, \delta z)\,[\bar{N}_2^2 - \bar{N}_1^2] , \tag{38}$$

  mit

  $$\mathcal{T}(z, z_0, \delta z) = \frac{1}{2}\left[1 + \tanh\left(\frac{z - z_0}{\delta z}\right)\right] \tag{39}$$

gegeben. Im Fall von variablem Grundstrom hängt $\bar{u}(z)$ von den 4 Parametern $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, z_0 und δz ab und ist analog zu (38) durch das Profil

$$\bar{u}(z) = \bar{u}_1 + \mathcal{T}(z, z_0, \delta z)\,[\bar{u}_2 - \bar{u}_1], \tag{40}$$

mit $\mathcal{T}$ aus (39) gegeben. In beiden Fällen wird ein differenzierbarer Übergang bei z_0 mit der Breite δz zwischen den Werten $\bar{N}_1^2$ und $\bar{N}_2^2$ (bzw. $\bar{u}_1$ und $\bar{u}_2$) erzeugt. In den vorinstallierten numerischen Experimenten mit variablem Grundstrom wird nur der Spezialfall $\bar{u}_1 = \bar{u}_0$ und $\bar{u}_2 = -\bar{u}_0$ betrachtet, so daß in den Parametertabellen jeweils nur $\bar{u}_0$ angegeben ist. In den Fällen mit höhenkonstanten Profilen werden der obere und untere Wert jeweils gleichgesetzt.

- Festlegung der Phasengeschwindigkeit c, Wellenzahl k und die Dämpfungsrate α, um $\hat{c} = c + i\,\alpha/k$ zu bestimmen.

  Bei den Experimenten zur "Schwammschicht" in der zweiten Serie ist die Dämpfungsrate eine Funktion von z, die von zwei Parametern α_0 und δz abhängt und durch das Profil

  $$\alpha(z) = \alpha_0 \, \exp\left(\frac{z - z_{\rm top}}{\delta z}\right) \tag{41}$$

  bestimmt wird.

- Festlegung der Scalenhöhe H

Anregungsfunktion $\tilde{F}(z)$

- Festlegung der Anregungsfunktion $\tilde{F}(z)$.

  In sämtlichen numerischen Experimente sind Anregungsprofile durch eine Funktion der Familie

  $$\tilde{F}(z) = \begin{cases} e^{-\frac{z}{2H}}\, A \left[e^{-\left(\frac{z-z_f}{z_w}\right)^2} - e^{-4} \right] \; , & |z - z_f| \leq 2z_w \; , \\ 0 \; , & |z - z_f| > 2z_w \; . \end{cases} \tag{42}$$

  gegeben. Drei Parameter müssen zur Bestimmung von $\tilde{F}$ festgelegt werden, die Amplitude A, das Zentrum der maximalen Anregung z_f und die Ausdehnung der Anregungszone $2z_w$.

Da die Profile $\tilde{F}$ für alle Parameter reell sind, werden nur Situationen erfaßt, für die $\hat{X}$ und $\hat{Q}$ ebenfalls reell sind und keine Dämpfung herrscht ($\alpha = 0$).

In den nächsten Abschnitten werden nun eine Reihe von Experimenten beschrieben, welche im Program schon vorinstalliert sind. Es genügt für ein Experiment die entsprechende Option $(1-19)$ im `modul user` zu wählen. Es können auch Experimente mit eigenen Parametereinstellungen durchgeführt werde, falls man die Option 0 wählt.

Die vorgeschlagenen Werte der Parameter werden jeweils in einer Tabelle angegeben. Darin sind diejenigen Parameter, welche innerhalb der Aufgabe durchvariiert werden, fett gedruckt. Ferner sind die verschiedenen Läufe in Gruppen zu meist vier oder fünf zusammengefaßt. Treten innerhalb einer Tabelle mehrere solcher Gruppen auf, so sind diese durch einen horizontalen Strich getrennt. Das Programm ist so strukturiert, daß die Läufe einer bestimmten Gruppe mit einem einzigen Programmlauf bearbeiten werden, sodaß die entsprechenden Plots in einer unmittelbaren Sequenz erzeugt und betrachtet werden können. In der Spalte "obere Randbedingung" bedeutet "LID" die Deckelrandbedingung und "RAD" die Ausstrahlrandbedingung.

Die nicht tabellierten Konstanten und Parameter sind bei allen Läufen festgehalten und wie folgt gesetzt: $g = 10$ m s^{-2}, $H = 7.5$ km, $T_0 = 300$ K, $p_0 = 1000$ hPa, $k = 2\pi/(100\,\mathrm{km})$ und $c = 0$ (d.h. es werden stationäre Wellen betrachtet).

Nachdem das Program $\tilde{w}$ bestimmt hat, werden in mehreren Plots folgende Größen ausgegeben:

- Profile $\bar{u}$ und $\bar{N}^2$ des Grundzustandes sowie Dämpfungsprofil $\alpha(z)$ (Bei Experiment 5.5) und die Wellengeschwindigkeit c.
- Real- und Imaginärteil von $\tilde{w}(z)$ ($\Re\tilde{w}(z)$ und $\Im\tilde{w}(z)$).
- Amplitude und Phase von $\hat{w}(z)$.
- Vertikaltransport von Horizontalimpuls $F_m(z)$

5 Lösung und Untersuchung der Gleichungen mit numerischen Hilfsmitteln: Höhenkonstanter Grundzustand

5.1 Experimente zur Resonanz (Optionen 1 und 2)

Lauf	N	$\bar{u}$ m/s	α $1/s$	$\bar{N}^2$ s^{-2}	w_{bot}	A	obere R.B.	z_{top} km
1	500	19.06	**0**	4×10^{-4}	1	0	LID	**28.5**
2	500	19.06	**0**	4×10^{-4}	1	0	LID	**29.25**
3	500	19.06	**0**	4×10^{-4}	1	0	LID	**30.0**
4	500	19.06	**0**	4×10^{-4}	1	0	LID	**30.75**
5	500	19.06	$\mathbf{10^{-5}}$	4×10^{-4}	1	0	LID	**28.5**
6	500	19.06	$\mathbf{10^{-5}}$	4×10^{-4}	1	0	LID	**29.25**
7	500	19.06	$\mathbf{10^{-5}}$	4×10^{-4}	1	0	LID	**30.0**
8	500	19.06	$\mathbf{10^{-5}}$	4×10^{-4}	1	0	LID	**30.75**

Führe die vorgeschlagenen numerische Läufe 1 bis 4 durch (**Option 1**).

Es sollte deutlich werden, daß die Wellenamplitude empfindlich von der Höhe des numerischen Definitionsbereichs z_{top} abhängt. Insbesondere wird die Wellenamplitude dann besonders groß, wenn z_{top} nahezu ein ganzzahliges Vielfaches der halben vertikalen Wellenlänge ist (wie groß ist letztere?), d.h. wenn näherungsweise

$$Qz_{\mathrm{top}} = k\pi\ ,\ k = 1, 2\dots \tag{43}$$

erfüllt ist. Mache Dir klar, wie es zu den sehr großen Amplituden kommt. Beachte, daß ein Vorzeichenwechsel der Lösung (Phasensprung um π) beim "Durchgang durch die Resonanz" stattfindet.

Leite her, daß die analytische Lösung durch

$$\tilde{w}(z) = w_{\rm bot} \frac{\sin Q(z_{\rm top} - z)}{\sin Q z_{\rm top}} \tag{44}$$

gegeben ist. Stimmen die numerischen Ergebnisse mit dieser Lösung überein?

Wiederhole die Läufe mit kleiner Dämpfung $\alpha = 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$, d.h. führe die Experimente 5 bis 8 (**Option 2**) durch. Was ändert sich qualitativ im Vergleich zum ungedämpften Fall? Wie sieht die analytische Lösung in diesem Falle (näherungsweise) aus?

5.2 Experimente mit einer dünnen inneren Anregungsschicht und Deckelrandbedingung (Optionen 3 und 4)

Lauf	N	$\bar{u}$ m/s	α $1/s$	$\bar{N}^2$ s^{-2}	$w_{\rm bot}$	A	z_f km	z_w km	obere R.B.	$z_{\rm top}$ km
9	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**14.5**	1	LID	**31.0**
10	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**15.0**	1	LID	**31.0**
11	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**15.5**	1	LID	**31.0**
12	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**16.0**	1	LID	**31.0**
13	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**16.5**	1	LID	**31.0**
14	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**13.5**	1	LID	**30.0**
15	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**14.25**	1	LID	**30.0**
16	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**15.0**	1	LID	**30.0**
17	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**15.75**	1	LID	**30.0**

Führe die vorgeschlagenen Läufe (**Optionen 3 und 4**) durch.

Im Falle der Läufe 14 bis 17 (**Option 4**) solltest Du wieder eine empfindliche Abhängigkeit der Amplitude von z_f finden: in einem bestimmten, eng begrenzten Bereich für z_f ist die Amplitude vergleichsweise sehr klein (sic!). Erklärung?!

Betrachte als Annäherung an das numerische Problem das folgende Problem

$$\tilde{w}_{zz} + Q^2\tilde{w} = F_0\,\delta(z - z_f)\ , \tag{45}$$

$$\tilde{w}(0) = 0\ , \tag{46}$$

$$\tilde{w}(z_{\rm top}) = 0\ . \tag{47}$$

Hierbei ist F_0 eine reelle Konstante. Leite her, daß die Lösung für dieses Problem durch

$$\tilde{w}(z) = \begin{cases} -F_0 Q^{-1} \frac{\sin Q(z_{\rm top} - z_f)}{\sin Q z_{\rm top}} \sin Qz\ , & 0 \le z \le z_f\ , \\ -F_0 Q^{-1} \frac{\sin Q z_f}{\sin Q z_{\rm top}} \sin Q(z_{\rm top} - z)\ , & z_f < z \le z_{\rm top}\ , \end{cases} \tag{48}$$

gegeben ist. Vergleiche mit der numerischen Lösung! Erklärung des gefundenen Verhaltens!?

5.3 Experimente mit einer dünnen inneren Anregung und Austrahlrandbedingung (Option 5)

Lauf	N	$\bar{u}$ m/s	α $1/s$	$\bar{N}^2$ s^{-2}	w_{bot}	A	z_f km	z_w km	obere R.B.	z_{top} km
18	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**13.5**	1	RAD	30.0
19	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**14.25**	1	RAD	30.0
20	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**15.0**	1	RAD	30.0
21	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**15.75**	1	RAD	30.0

Führe die vorgeschlagenen numerischen Experimente (**Option 5**) durch. Betrachte dabei vor allem die Abhängigkeit des Impulsflusses am oberen Rand, $|F_m(z_{\text{top}})|$ von z_f. Beachte, wie dieser variiert und ein deutliches Minimum annimmt, wenn z_f eine bestimmte Lage (welche?) einnimmt.

Betrachte das folgende, idealisierte Problem als Annäherung an die numerischen Experimente

$$\tilde{w}_{zz} + Q^2 \tilde{w} = F_0\, \delta(z - z_f) \ , \tag{49}$$

$$\tilde{w}(0) = 0 \ , \tag{50}$$

$$\text{RAD bei } z = z_{\text{top}} \ . \tag{51}$$

Hierbei ist F_0 eine reelle Konstante. Leite her, daß die Lösung für dieses Problem durch

$$\tilde{w}(z) = \begin{cases} -F_0 Q_\diamond^{-1} e^{iQ_\diamond z_f} \sin Q_\diamond z, & 0 \le z \le z_f \ , \\ -F_0 Q_\diamond^{-1} \sin Q_\diamond z_f \, e^{iQ_\diamond z} \ , & z_f < z \le z_{\text{top}} \ , \end{cases} \tag{52}$$

gegeben ist.

Vergleiche mit der numerischen Lösung! Erklärung des gefundenen Verhaltens!? Interpretiere das Ergebnis durch die Existenz einer Wellenquelle bei z_f, Reflektion am Boden und Interferenz der nach oben reflektierten Welle mit der direkt nach oben ausgestrahlten Welle.

5.4 Experimente mit breiter innerer Anregung und Ausstrahlrandbedingung (Optionen 6, 7 und 8)

Die flache innere Anregung $\tilde{F}(z)$ im vorigen Experiment (5.3) kann man als eine kohärente Wellenquelle interpretieren. Ist die Anregung $\tilde{F}(z)$ hingegen relativ breit, so geht die Kohärenz verloren und es können qualitativ neue Effekte auftreten. Insbesondere besteht die Möglichkeit der destruktiven Interferenz zwischen den an verschiedenen Positionen emittierten Elementarwellen.

Lauf	N	$\bar{u}$ m/s	α $1/s$	$\bar{N}^2$ s^{-2}	w_{bot}	A	z_f km	z_w km	obere R.B.	z_{top} km
22	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**13.5**	**6**	RAD	30.0
23	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**14.25**	**6**	RAD	30.0
24	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**15.0**	**6**	RAD	30.0
25	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**15.75**	**6**	RAD	30.0
26	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**14.0**	**1**	RAD	30.0
27	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**14.0**	**2**	RAD	30.0
28	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**14.0**	**3**	RAD	30.0
29	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**14.0**	**4**	RAD	30.0
30	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**14.0**	**5**	RAD	30.0
31	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**14.0**	**6**	RAD	30.0
32	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**0**	**6**	RAD	30.0
33	500	19.06	0	4×10^{-4}	0	10^{-6}	**0**	**12**	RAD	30.0

Führe die vorgeschlagenen numerischen Experimente 22 bis 25 (**Option 6**) durch. Im Gegensatz zu den enstprechenden Läufen mit flacher Anregung (18 bis 21) besteht hier nur eine sehr schwache Abhängigkeit von z_f. Ferner ist der Impulsfluß $|F_m(z_{\mathrm{top}})|$ am oberen Rand insgesamt sehr klein (im Vergleich zur flachen Anregung). Beachte auch das Verhalten des Implusflusses $F_m(z)$ im Bereich der Anregung und verifiziere die Beziehung (37).

Führe die vorgeschlagenen numerischen Experimente 26 bis 31 (**Option 7**) durch. Diese Serie von Läufen macht den Übergang von flacher zu breiter Anregung deutlich.

Führe die vorgeschlagenen numerischen Experimente 32 und 33 (**Option 8**) durch. Obwohl in beiden Fällen die Anregung breit ist, hat man nun wieder einen starken Impulsfluß $|F_m(z_{\mathrm{top}})|$ am oberen Rand. Dies hat damit zu tun, daß das Maximum der Anregung am Boden aufliegt, was bei der vorliegenden Form von $\tilde{F}(z)$ die destruktive Interferenz zu vermeiden vermag. Bei Anregung am Boden ist $|F_m(z_{\mathrm{top}})|$ auch nahezu unabhängig von der Breite z_w. Warum?

Betrachte zur Interpretation der obigen numerischen Experimente das folgende idealisierte Problem

$$\tilde{w}_{zz} + Q^2 \tilde{w} = A\,\mathcal{H}(z, z_1, z_2) \ , \tag{53}$$

$$\tilde{w}(0) = 0 \ , \tag{54}$$

$$\text{RAD bei } z = z_{\mathrm{top}} \ . \tag{55}$$

Hierbei ist $z_1 < z_2$ und A eine reelle Konstante; und die Funktion $\mathcal{H}$ ist durch

$$\mathcal{H}(z, z_1, z_2) = \begin{cases} 1 \ , & z_1 \le z \le z_2 \\ 0 \ , & \text{sonst} \end{cases} \tag{56}$$

gegeben. Leite her, daß die Lösung für dieses Problem für $z < z_1$ und $z > z_2$ wie folgt gegeben ist:

$$\tilde{w}(z) = \begin{cases} A\,Q_\diamond^{-2}\, i \left(e^{iQ_\diamond z_2} - e^{iQ_\diamond z_1} \right) \sin Q_\diamond z \ , & 0 \le z \le z_1 \ , \\ A\,Q_\diamond^{-2} \left(\cos Q_\diamond z_2 - \cos Q_\diamond z_1 \right) e^{iQ_\diamond z} \ , & z_2 < z \le z_{\mathrm{top}} \ . \end{cases} \tag{57}$$

5.5 Experimente mit Dämpfung (Optionen 9 und 10)

Lauf	N	$\bar{u}$ m/s	α $1/s$	$\bar{N}^2$ s^{-2}	w_{bot}	A	obere R.B.	z_{top} km
34	500	19.06	**0**	4×10^{-4}	1	0	**RAD**	31.0
35	500	19.06	$\mathbf{10^{-5}}$	4×10^{-4}	1	0	**RAD**	31.0
36	500	19.06	$\mathbf{10^{-4}}$	4×10^{-4}	1	0	**RAD**	31.0
37	500	19.06	$\mathbf{10^{-3}}$	4×10^{-4}	1	0	**RAD**	31.0
38	500	19.06	**0**	4×10^{-4}	1	0	**LID**	31.0
39	500	19.06	$\mathbf{10^{-5}}$	4×10^{-4}	1	0	**LID**	31.0
40	500	19.06	$\mathbf{10^{-4}}$	4×10^{-4}	1	0	**LID**	31.0
41	500	19.06	$\mathbf{10^{-3}}$	4×10^{-4}	1	0	**LID**	31.0

Führe die vorgeschlagenen numerische Läufe 34 bis 41 (**Option 9**) durch. Im Falle der RAD-Bedingung nimmt die Lösung mit zunehmender Dämpfung einfach nach oben hin immer stärker ab. Im Falle der LID-Bedingung hingegen vollzieht sich ein qualitativer Übergang von einer stehenden Welle (bei sehr kleinen Werten von α) zu einer sich nach oben ausbreitenden Welle (bei größeren Werten von α). Besonders augenfällig ist dieser Übergang am Verhalten von $F_m(z)$ zu erkennen. Man kann das beobachtete Verhalten so interpretieren, daß für starke Dämpfung die Welle gar nie am oberen Rand ankommt, sondern vorher bereits "verschwindet" (wohin?). Somit kann es auch nicht zur stehenden Welle kommen, welche schließlich die Überlagerung der sich nach oben ausbreitenden Welle mit der vom Deckel nach unten reflektierten Welle ist. Beachte, daß im Falle hinreichend starker Dämpfung die Lösung nicht mehr von der oberen Randbedingung abhängt. Darauf werden wir in späteren Experimenten noch zurückkommen.

6 Lösung und Untersuchung der Gleichungen mit numerischen Hilfsmitteln: Höhenabhängiger Grundzustand

In den bisherigen Experimenten wurde nur ein z-unabhängiger Grundzustand betrachtet, d.h. Q^2 war immer höhenkonstant. In diesem Falle ist die vertikale Strukturgleichung einer analytischen Behandlung zugänglich. Die eigentliche Domäne der Numerik hingegen sind Probleme, bei denen sich der Grundzustand mit der Höhe verändert, also $Q^2(z)$ eine Funktion der Höhe z ist. Im allgemeinen gibt es dann keine analytische Lösung mehr. In zwei Grenzfällen ist jedoch auch für variables $Q^2(z)$ eine analytische Behandlung möglich. Erstens, wenn der Grundzustand stückweise konstant ist, und zweitens, wenn die Höhenabhängigkeit des Grundzustandes sehr graduell ist. Im letzteren Fall kann man näherungsweise eine analytische Lösung herleiten. Beide Fälle sollen im Laufe der Experimente besprochen werden.

6.1 Experimente mit schichtweise konstantem $\bar{N}^2$ (Optionen 11 und 12)

Wir nehmen an, daß wie bisher der Wind $\bar{u}$ höhenkonstant sei, die statische Stabilität dagegen nicht. Sie habe, wie schon in Abschnitt 4 angegeben, das Profil

$$\bar{N}^2(z) = \bar{N}_1^2 + \mathcal{T}(z, z_0, \delta z)\,[\bar{N}_2^2 - \bar{N}_1^2]\,. \tag{58}$$

Hierbei sind $\bar{N}_1^2$ und $\bar{N}_2^2$ jeweils konstant. Die Funktion $\mathcal{T}$ ist durch

$$\mathcal{T}(z, z_0, \delta z) = \frac{1}{2}\left[1 + \tanh\left(\frac{z - z_0}{\delta z}\right)\right] \tag{59}$$

gegeben und liefert einen stetig differenzierbaren Übergang für $\bar{N}^2(z)$ zwischen den beiden Werten $\bar{N}_1^2$ und $\bar{N}_2^2$. In diesen Experimenten wird der Fall betrachtet, daß der Übergang sehr scharf ist, daß also δz sehr klein (im Vergleich zur vertikalen Wellenlänge) ist.

Lauf	N	$\bar{u}$ m/s	α $1/s$	$\bar{N}_1^2$ 10^{-4}s^{-2}	$\bar{N}_2^2$ 10^{-4}s^{-2}	z_0 km	δz km	$w_{\rm bot}$	A	obere R.B.	$z_{\rm top}$ km
42	500	19.06	0	2.2571	**8.9798**	**12**	0.1	1	0	RAD	30.0
43	500	19.06	0	2.2571	**8.9798**	**13**	0.1	1	0	RAD	30.0
44	500	19.06	0	2.2571	**8.9798**	**14**	0.1	1	0	RAD	30.0
45	500	19.06	0	2.2571	**8.9798**	**15**	0.1	1	0	RAD	30.0
46	500	19.06	0	2.2571	**0.01**	**12**	0.1	1	0	RAD	30.0
47	500	19.06	0	2.2571	**0.01**	**13**	0.1	1	0	RAD	30.0
48	500	19.06	0	2.2571	**0.01**	**14**	0.1	1	0	RAD	30.0
49	500	19.06	0	2.2571	**0.01**	**15**	0.1	1	0	RAD	30.0

Führe die numerischen Läufe 42 bis 45 (**Option 11**) durch. Es sollte sich zeigen, daß $F_m(z_{\rm top})$ stark von z_0 abhängt und sich zwischen zwei Extremwerten, welche sich um den Faktor vier unterscheiden, bewegt. Betrachte zur Erklärung des Phänomens das folgende idealisierte Problem

$$\tilde{w}_{zz} + Q^2\tilde{w} = 0 \ , \tag{60}$$

$$\tilde{w}(0) = 1 \ , \tag{61}$$

$$\text{RAD bei } z = z_{\rm top} \ , \tag{62}$$

$$\bar{N}^2(z) = \begin{cases} \bar{N}_1^2 \ , & 0 \le z \le z_0 \ , \\ \bar{N}_2^2 \ , & z_0 < z \le z_{\rm top} \ . \end{cases} \tag{63}$$

Leite her, daß die Lösung für dieses Problem durch

$$\tilde{w}(z) = \begin{cases} w_{\rm bot}\, e^{-iQ_1 z} + i w_{\rm bot} \sin Q_1 z \, \frac{e^{-iQ_1 z_0}(Q_1+Q_2)}{Q_1 \cos Q_1 z_0 - iQ_2 \sin Q_1 z_0}, & 0 \le z \le z_0 \ , \\ w_{\rm bot}\, e^{iQ_2(z-z_0)}\, e^{-iQ_1 z_0}\, \frac{iQ_1 \sin Q_1 z_0 + Q_1 \cos Q_1 z_0}{Q_1 \cos Q_1 z_0 - iQ_2 \sin Q_1 z_0} \ , & z_0 < z \le z_{\rm top} \ , \end{cases} \tag{64}$$

gegeben ist. Vergleiche mit der numerischen Lösung. Dabei entspricht Q_1 dem Wert $\bar{N}_1^2$ und Q_2 dem Wert $\bar{N}_2^2$. Interpretiere das gefundene Verhalten mit Hilfe von partieller Reflektion am Niveau z_0 und nachfolgender Interferenz der nochmals am Boden reflektierten Welle mit der primären Welle.

Im Falle der Läufe 46 bis 49 (**Option 12**) ist $Q^2(z_{\rm top}) < 0$. Für die Ausstrahlrandbedingung wird in diesem Falle am oberen Rand diejenige Wurzel $Q_\diamond$ genommen, welche einen positiven Imaginärteil hat, für die also $\Im Q_\diamond > 0$ gilt. Bei der Durchführung der numerischen Läufe 46 bis 49 sollte sich herausstellen, daß die Wellenamplitude sehr empfindlich von z_0 abhängt und daß in einem engen Bereich um bestimmte Werte die Wellenamplitude sehr groß wird. Dies erinnert stark an Resonanz. Tatsächlich liegt bei den Läufen 46 bis 49 eine ganz andere Situation vor als vorher. Oberhalb von z_0 ist jetzt nämlich keine Wellenausbreitung mehr möglich. Daher entspricht dieses Problem am ehesten dem Problem in Abschnitt 5.1, wo am oberen Rand ein Deckel war. Dies erklärt, warum Resonanz gefunden wird.

6.2 Experimente mit gradueller Änderung von $\bar{N}^2(z)$ – WKB-Näherung (Optionen 13 und 14)

Lauf	N	$\bar{u}$ m/s	α $1/s$	$\bar{N}_1^2$ $10^{-4}\mathrm{s}^{-2}$	$\bar{N}_2^2$ $10^{-4}\mathrm{s}^{-2}$	z_0 km	δz km	w_{bot}	A	obere R.B.	z_{top} km
50	500	19.06	0	2.2571	8.9798	**12**	3	1	0	RAD	30.0
51	500	19.06	0	2.2571	8.9798	**13**	3	1	0	RAD	30.0
52	500	19.06	0	2.2571	8.9798	**14**	3	1	0	RAD	30.0
53	500	19.06	0	2.2571	8.9798	**15**	3	1	0	RAD	30.0

Führe die numerischen Läufe 50 bis 53 (**Option 13**) durch. Der einzige Unterschied zu 42 bis 45 besteht darin, daß der Übergang zwischen $\bar{N}_1^2$ und $\bar{N}_2^2$ jetzt relativ graduell ist. Offenbar verändert dies den Charakter der Lösung signifikant. Es sieht nun so aus, als ob sich die Welle schlicht nach oben ausbreitet und lokal die durch $Q^2(z)$ determinierte vertikale Wellenlänge annimmt. Eine partielle Wellenreflektion findet jetzt offenbar nicht statt. Dies erklärt auch, warum jetzt $F_m(z_{\mathrm{top}})$ praktisch unabhängig von z_0 ist. Beachte ferner die Variation der Wellenamplitude mit der Höhe. Da Q^2 mit der Höhe variiert, muß auch $|\tilde{w}|^2$ mit der Höhe variieren, damit F_m höhenkonstant bleibt (siehe Gleichung (37)).

Eine näherungsweise Lösung für den vorliegenden Fall liefert die sogenannte WKB–Methode. Diese Näherung setzt voraus, daß der Grundzustand nur geringfügig mit der Höhe variiert. "Geringfügig" impliziert dabei einen Vergleich mit der vertikalen Wellenlänge. Genauer gesagt variiert eine beliebige Funktion $\psi(z)$ langsam mit der Höhe z, wenn

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial z}\right| \ll |Q\,\psi| \tag{65}$$

erfüllt ist. Es wird jetzt also angenommen, daß $Q(z)$ selber nur geringfügig mit der Höhe variiert. Ferner wird angenommen, daß sich die Welle von ihrer Quelle aus nur in eine Richtung hin (hier nach oben) ausbreitet und daß an keiner Stelle Reflektion auftritt (da Reflektion zumindest eine teilweise abwärts gerichtete Wellenkomponente mit sich bringen würde). Der Ansatz für die Lösung ist

$$\tilde{w}(z) = A(z)\, e^{i \int_{z_0}^{z} Q(z')\, dz'} \; . \tag{66}$$

Hierbei wird angenommen, daß die Amplitude $A(z)$ nur langsam mit der Höhe variiert. Ferner kann die Amplitude $A(z)$ o.B.d.A. als reell angenommen werden (weil z_0 letztlich ein freier Parameter ist); für Q ist diejenige Wurzel von Q^2 zu nehmen, welche lokal Wellenausbreitung nach oben beschreibt. Zeige, daß unter diesen Annahmen der Ansatz (66) die Gleichung (22) mit $\tilde{F} = 0$ erfüllt.

Die Amplitude $A(z)$ in (66) besorgt man sich mit Hilfe der Gleichung (37) für den Impulsfluß. Das geht wie folgt. Zeige zunächst, daß für $\tilde{F} = 0$ und den WKB-Ansatz (66) aus den Beziehungen (35) und (37) die folgenden zwei Beziehungen hergeleitet werden können

$$F_m = -\frac{\rho_o}{2k}\, |\tilde{w}|^2\, \Re Q \; , \tag{67}$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial z} = \frac{\rho_o}{2k}\, |\tilde{w}|^2\, \Im Q^2 \; . \tag{68}$$

Falls die Welle zumindest eine gewisse Ausbreitungskomponente hat, ist $\Re Q \neq 0$. In diesem Falle folgt

$$\frac{\partial F_m}{\partial z} = -2\Im(Q)\, F_m \; . \tag{69}$$

Das zweifache des Imaginärteils von Q bestimmt also die Abnahme von F_m mit der Höhe. Setzt man nun den Ansatz (66) in (69) ein, so erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{1}{2\,(\Re Q)}\frac{\partial\,(\Re Q)}{\partial z}\ , \tag{70}$$

deren Lösung

$$A(z) = \frac{const}{\sqrt{\Re Q}} \tag{71}$$

ist. Wenn am unteren Rand $\tilde{w} = w_{\mathrm{bot}}$ sein soll, so sieht die WKB-Lösung schließlich wie folgt aus

$$\tilde{w}(z) = w_{\mathrm{bot}}\sqrt{\frac{\Re Q(0)}{\Re Q(z)}}\ \exp(\,i\int_0^z Q(z')\,dz')\ . \tag{72}$$

Führe zum Test der WKB-Näherung die folgenden numerischen Läufe 54 bis 57 (**Option 14**) durch und vergleiche die numerische Lösung jeweils mit der (numerisch nach (72) berechneten!) WKB-Lösung (in **Option 14** enthalten). Interpretiere das Ergebnis!

Lauf	N	$\bar{u}$ m/s	α $1/s$	$\bar{N}_1^2$ $10^{-4}\mathrm{s}^{-2}$	$\bar{N}_2^2$ $10^{-4}\mathrm{s}^{-2}$	z_0 km	δz km	w_{bot}	A	obere R.B.	z_{top} km
54	500	19.06	0	2.2571	8.9798	15	**3.0**	1	0	RAD	30.0
55	500	19.06	0	2.2571	8.9798	15	**1.3**	1	0	RAD	30.0
56	500	19.06	0	2.2571	8.9798	15	**0.6**	1	0	RAD	30.0
57	500	19.06	0	2.2571	8.9798	15	**0.1**	1	0	RAD	30.0

Es sollte sich herausstellen, daß für $\delta z = 3$ km die WKB-Lösung die numerische Lösung sehr gut wiederspiegelt. Für kleinere Werte von δz werden die Aweichungen zunehmend gravierender. Beachte insbesondere, wie die WKB-Lösung (per Konstuktion!) die teilweise Reflektion an der "Unstetigkeitsstelle" im Falle des sehr scharfen Übergangs nicht nachvollziehen kann. In diesem Falle gibt die WKB Lösung auch die Stärke $|F_m|$ des Impulsflusses nicht richtig wieder (warum? Beide können bis zu einem Faktor 2 auseinander liegen, die WKB Lösung unter- oder überschätzt den tatsächlichen Impulsfluß, je nach Lage z_0 des Übergangs).

6.3 Experimente zu Schichten mit starker Dämpfung ("Schwammschicht") (Optionen 15 und 16)

Die Ausstrahlrandbedingung ist numerisch meist deutlich schwieriger zu implementieren als ein Deckel. Es gibt einen Trick, wie man die Ausstrahlrandbedingung faktisch umgehen kann. Man fügt dazu eine Schicht mit erhöhter Dämpfung oberhalb desjenigen Bereiches an, für den man sich eigentlich interessiert. Diese Schicht nennt man Schwammschicht. Oberhalb (also "jenseits") der Schwammschicht spezifiziert man als Randbedingung die Deckel-Randbedingung anstelle der eigentlich zu fordernden Ausstrahlrandbedingung.

Warum dieses Vorgehen faktisch eine Ausstrahlrandbedingung vortäuscht, sollte aus dem bisher gelernten klar sein. In den Experimenten 5.5 wurde nämlich gezeigt, daß bei starker Dämpfung die Lösung von der oberen Randbedingung unabhängig ist und den Charakter einer sich ausbreitenden Welle hat. In den Experimenten 6.2 wurde der Fall untersucht, daß der Grundzustand “langsam veränderlich” ist. Man muß also lediglich dafür sorgen, daß das Anwachsen der Dämpfung innerhalb der Schwammschicht graduell genug ist, sodaß keine künstliche Reflektion auftritt. Ferner muß man dafür sorgen, daß die Schwammschicht insgesamt stark und dick genug ist, sodaß die Welle bis zum Erreichen des Randes so weit gedämpft ist, daß keine nennenswerte Reflektion nach unten stattfindet. Andererseits darf die Schwammschicht nicht in das eigentlich interessierende Gebiet hereinreichen, weil das auch dort die Lösung (dort in unerwünschter Weise!) dämpfen würde. In diesem Verfahren wird also der Dämfpungskoeffizient α zu einer Funktion von z. Hier wurde

$$\alpha(z) = \alpha_0 \exp\left(\frac{z - z_{\text{top}}}{\delta z}\right) \tag{73}$$

mit den Konstanten α_0 und δz benutzt.

Führe die numerischen Läufe 58 und 59 – 62 (**Option 15**) durch und erläutere die Ergebnisse.

Lauf	N	$\bar{u}$ m/s	$\bar{N}^2$ s^{-2}	α_0 s^{-1}	δz km	w_{bot}	A	obere R.B.	z_{top} km
58	500	19.06	4×10^{-4}	**0**	**1**	1	0	**RAD**	**30.0**
59	500	19.06	4×10^{-4}	$\mathbf{3 \times 10^{-3}}$	**1**	1	0	**LID**	**50.0**
60	500	19.06	4×10^{-4}	$\mathbf{3 \times 10^{-3}}$	**2**	1	0	**LID**	**50.0**
61	500	19.06	4×10^{-4}	$\mathbf{3 \times 10^{-3}}$	**3**	1	0	**LID**	**50.0**
62	500	19.06	4×10^{-4}	$\mathbf{3 \times 10^{-3}}$	**5**	1	0	**LID**	**50.0**

Dabei sei der eigentlich interessierende Bereich die Atmosphäre unterhalb von $z = 30$ km. Die Schwammschicht ist der Bereich 30 km $\le z \le$ 50 km. Der Lauf 58 repräsentiert das, was eigentlich berechnet werden soll (RAD ohne Dämpfung). Läufe 59 bis 62 repräsentieren den Trick mit der Schwammschicht. Nicht alle Kombinationen von α_0 und δz liefern das gewünschte Ergebnis. Bestimme jeweils auch die WKB-Lösung und wiederhole die Läufe 59 bis 62 mit RAD (**Option 16**) als obere Randbedinung.

6.4 Experimente mit variablem Grundstrom und das Auftreten von kritischen Linien (Optionen 17, 18 und 19)

Wenn man es mit einer Scherströmung zu tun hat, wenn also $\bar{u} = \bar{u}(z)$ ist, so kann es zu einer sogenannten kritischen Linie kommen. Eine kritische Linie ist ein Niveau z_c, bei dem $\bar{u}(z_c) = c$ gilt, die Grundströmung also gerade gleich der Phasengeschwindigkeit der Welle ist. Im Falle der hier betrachteten stationären Wellen liegt ein kritisches Niveau dort vor, wo $\bar{u} = 0$ ist. Eigentlich ist lineare Theorie in der Nähe einer kritischen Linie ungültig, weil grundsätzlich nicht angenommen werden kann, daß man die nichtlinearen Terme (z.B. $u'w'$) gegenüber den linearen Termen (z.B. $[\bar{u} - c]u'$) vernachlässigen darf. Wie nachher deutlich werden wird, liefert im Falle hinreichend großer Dämpfung die lineare Theorie dennoch das richtige Ergebnis. Formal kann man natürlich in jedem Falle die lineare Gleichung (22) näher untersuchen. Das soll in dieser Aufgabe geschehen.

Betrachte zunächst den reibungsfreien Fall. Für $\alpha = 0$ besitzt $Q^2(z)$ eine Singularität an der kritischen Linie, d.h.

$$|Q^2| \to \infty \text{ für } z \to z_c \,. \tag{74}$$

Nimm an, daß in der Umgebung von z_c das Windprofil wie folgt gegeben ist (Näherung durch eine Taylorreihe mit nicht verschwindendem ersten Glied)

$$\bar{u}(z) = c + s(z - z_c) \text{ für } z \approx z_c \tag{75}$$

mit $s = d\bar{u}(z_c)/dz$. Es folgt, daß

$$Q^2(z) \approx \frac{\bar{N}^2}{s^2(z - z_c)^2} \text{ für } z \approx z_c \,. \tag{76}$$

Die vertikale Wellenlänge ist

$$\lambda_{(z)} \propto |Q^{-1}| \approx \frac{|s|}{\bar{N}}|z - z_c| \text{ für } z \approx z_c \,, \tag{77}$$

sie geht also gegen Null für $z \to z_c$, und die vertikale Gruppengeschwindigkeit

$$|c_{gz}| \approx \frac{k}{\bar{N}} s^2 (z - z_0)^2 \text{ für } z \approx z_c \tag{78}$$

verschwindet ebenfalls bei Annäherung an die kritische Linie. Eine Wellengruppe schleicht sich also sehr langsam an die kritische Linie heran.

Wenn nun die Situation nicht völlig konservativ ist, sondern ein kleiner Anteil an Dämpfung vorhanden ist, so besteht die Möglichkeit (zumindest bei hinreichend großer Dämpfung), daß die Welle schneller dissipiert wird als sie sich der kritischen Linie nähert. Dann sollten die nichtlinearen Terme keine Rolle spielen und lineare Theorie ihre Gültigkeit behalten. Beachte, daß im wirklich reibungsfreien Fall lineare Theorie mit Sicherheit grundlegend falsch ist. Tatsächlich kann man zeigen, daß dann die Lösung einen völlig anderen Charakter hat. Hier wollen wir uns jedoch auf den Fall mit Dämpfung beschränken und davon ausgehen, daß die lineare Theorie anwendbar ist.

Betrachte daher nun den Fall mit Dämpfung, $\alpha \neq 0$. Formal ist damit die Singularität in (22) bzw. (23) beseitigt. Zeige, daß dann für $z \approx z_c$

$$Q \equiv Q_r + iQ_i = \frac{\bar{N}sz'}{s^2 z'^2 + \alpha^2/k^2} + i\frac{\bar{N}\alpha/k}{s^2 z'^2 + \alpha^2/k^2} \tag{79}$$

gilt, wobei $z' = z - z_c$ ist, wo $Q_r = \Re Q$, $Q_i = \Im Q$ und wo diejenige Wurzel genommen wurde, welche einer Ausbreitung nach oben entspricht. Bei Annäherung an die kritische Linie wird also $Q_r \to 0$ und $Q_i \to \bar{N}k/\alpha$. Dies Wirkung eines kleinen $\alpha \neq 0$ ist also höchst interessant: je *kleiner* α ist, desto *stärker* ist die Dämpfung an der kritischen Linie. Zugleich wird aber die Breite des Bereichs mit starkter Dämpfung immer kleiner. Ferner geht an der kritischen Linie die vertikale Wellenlänge $\lambda_{(z)} \propto |Q_r^{-1}|$ gegen *unendlich* und *nicht* gegen null.

Zusammengefaßt (α klein, aber $\neq 0$): Eine Wellenfront nähert sich einer kritische Linie sehr langsam, ihre vertikale Wellenlänge wird sehr klein, und ihre Amplitude wird sehr stark gedämpft. Dies alles legt nahe, daß die Welle einfach verschwindet, bevor sie die kritische Linie erreicht.

Man kann sich die Frage stellen, was im Grenzfall $\alpha \to 0$ passiert. In der Tat bleibt das obige Bild im wesentlichen richtig. Einen Hinweis, daß dies möglicherweise so ist, kann man daraus entnehmen, daß die totale Dämpfung bei Durchgang durch die kritische Linie,

$\int_{-\infty}^{\infty} Q_i(z')\,dz' = \pi\bar{N}/s$, von α unabhängig ist. Zur genaueren Untersuchung geht man wie folgt vor. Für $z \approx z_0$ hat die Gleichung (22) lokal die folgende Struktur

$$z'^2 \tilde{w}_{z'z'} + Ri\,\tilde{w} = 0 \;, \tag{80}$$

wobei die Richardson-Zahl durch $Ri = \bar{N}^2/s^2$ definiert ist. Man kann zeigen (hier ohne Herleitung), daß für $Ri > 1/4$ diejenige Lösung, welche sich als Grenzwert von $\alpha \to 0$ ergibt, wie folgt aussieht

$$\tilde{w}(z') = \begin{cases} A\sqrt{z'}\; e^{i\mu \ln z'} \;, & z' > 0 \\ -iA\sqrt{|z'|}\; e^{\mu\pi}\; e^{i\mu \ln|z'|} \;, & z' < 0 \;, \end{cases} \tag{81}$$

wobei $\mu = \sqrt{Ri - 1/4}$ und $A = const$ ist. Es folgt, daß die Amplitude unmittelbar oberhalb der kritischen Linie um den Faktor $e^{-\mu\pi}$ kleiner ist als eine vergleichbare Distanz unmittelbar unterhalb der kritischen Linie. Beachte, daß für $\alpha \to 0$ der Impulsfluß außerhalb der kritischen Linie wegen (37) konstant sein muß. Indes, gerade bei $z = z_c$ macht letztere Gleichung keine Aussage, weil zu ihrer Herleitung die Existenz einer regulären Lösung vorausgesetzt wurde. Die Auswertung von (81) zeigt, daß der Impulsfluß im Grenzfall $\alpha \to 0$ bei $z = z_c$ eine Unstetigkeitsstelle hat. Der Sprung ist derart, daß $|F_m|$ oberhalb der kritischen Linie einen Faktor $e^{-2\mu\pi}$ kleiner ist als unterhalb. In typischen atmosphärischen Anwendungen ist Ri von der Größenordnung $1 \ldots 10$, sodaß der Faktor $e^{-2\mu\pi} \ll 1$ ist. Mit anderen Worten, im Grenzfall $\alpha \to 0$ gelangt nur ein sehr kleiner Bruchteil des Impulsflusses durch die kritische Linie hindurch. Der Rest "verschwindet" in der kritischen Linie.

Zusammengefaßt liefert lineare Theorie mit $\alpha \neq 0$ sowie auch im Grenzfall $\alpha \to 0$ für $Ri > 1/4$ starke Wellenabsorption an der kritischen Linie. Beachte, daß dieser Grenzwert in dem Sinne singulär ist, als daß für $\alpha = 0$ wirklich nichtlineare Theorie bemüht werden muß, welche (wie oben bereits angedeutet) ein völlig anderes Ergebnis liefert, nämlich totale Reflektion ohne jegliche Absorption.

Die Tatsache, daß im Bereich der kritischen Linie die vertikale Wellenlänge sehr klein wird, legt nahe, daß hohe Anforderungen an die numerische Auflösung bestehen. Wie klein der Gitterabstand sein muß, überlegt man sich wie folgt. Nach (79) ist $Q_r = Q_i$ für $sz' = \alpha/k$. Definiert man

$$z_d \equiv \frac{\alpha}{sk} \;, \tag{82}$$

so dominiert für $|z - z_c| \ll z_d$ die Dämpfung (d.h. Q weitgehend imaginär), während für $|z - z_c| \gg z_d$ die Ausbreitung dominiert (d.h. Q weitgehend reell). Der Übergang findet bei $|z - z_c| \approx z_d$ statt. Dieser Übergang von sinusartiger zu exponentiell gedämpfter Lösung muß von der Numerik erfaßt werden, weil andernfalls der Charakter der Lösung falsch wird. Das legt nahe, daß

$$\Delta z \lesssim z_d \equiv \frac{\alpha}{sk} \tag{83}$$

sein muß. Je kleiner die Dämpfung ist, desto kleiner muß Δz sein.

Betrachte speziell das folgende Profil für den Grundstrom

$$\bar{u}(z) = \bar{u}_0 - 2\bar{u}_0\,\mathcal{T}(z, z_0, \delta z) \tag{84}$$

(mit $\bar{u}_0 > 0$) und führe damit die folgenden numerischen Experimente durch.

Lauf	N	$\bar{u}_0$ m/s	z_0 km	δz km	$\bar{N}^2$ s^{-2}	α s^{-1}	w_{bot}	A	obere R.B.	z_{top} km
63	**250**	20.0	15.0	4.0	4×10^{-4}	$\mathbf{1 \times 10^{-5}}$	1	0	RAD	30.0
64	**500**	20.0	15.0	4.0	4×10^{-4}	$\mathbf{1 \times 10^{-5}}$	1	0	RAD	30.0
65	**1000**	20.0	15.0	4.0	4×10^{-4}	$\mathbf{1 \times 10^{-5}}$	1	0	RAD	30.0
66	**2000**	20.0	15.0	4.0	4×10^{-4}	$\mathbf{1 \times 10^{-5}}$	1	0	RAD	30.0
67	**500**	20.0	15.0	4.0	4×10^{-4}	$\mathbf{0.25 \times 10^{-5}}$	1	0	RAD	30.0
68	**1000**	20.0	15.0	4.0	4×10^{-4}	$\mathbf{0.25 \times 10^{-5}}$	1	0	RAD	30.0
69	**2000**	20.0	15.0	4.0	4×10^{-4}	$\mathbf{0.25 \times 10^{-5}}$	1	0	RAD	30.0
70	**4000**	20.0	15.0	4.0	4×10^{-4}	$\mathbf{0.25 \times 10^{-5}}$	1	0	RAD	30.0
71	**500**	20.0	15.0	4.0	4×10^{-4}	$\mathbf{2 \times 10^{-5}}$	1	0	RAD	30.0
72	**1000**	20.0	15.0	4.0	4×10^{-4}	$\mathbf{1 \times 10^{-5}}$	1	0	RAD	30.0
73	**2000**	20.0	15.0	4.0	4×10^{-4}	$\mathbf{0.5 \times 10^{-5}}$	1	0	RAD	30.0
74	**4000**	20.0	15.0	4.0	4×10^{-4}	$\mathbf{0.25 \times 10^{-5}}$	1	0	RAD	30.0

Die Läufe 63 bis 70 (**Optionen 17 und 18**) sollten jeweils den Übergang von noch nicht ausreichender zu ausreichender numerischer Auflösung verdeutlichen. Verifiziere, daß die Beziehung (83) tatsächlich eine gute Richtlinie dafür abgibt, wann die Konvergenz der numerischen Lösung erreicht wird.

Mache Dir klar, daß die WKB-Lösung in der Nähe der kritischen Line gültig sein sollte, solange $Ri \gg 1$ ist. Bei den obigen Läufen wird jeweils auch die WKB-Lösung wie bei den Experimenten 6.2 mit Gleichung (72) berechnet. Einzig bei $z = z_c$ ist die WKB-Lösung nicht definiert. Für den Fall, daß ein Gitterpunkt zufällig genau bei $z = z_c$ liegt, wird dort die WKB-Lösung einfach zu Null gesetzt. Beachte, daß wegen des Vorzeichenwechsels von $\bar{u} - c$ der Faktor $\Re Q(z)$ oberhalb von z_c umgekehrtes Vorzeichen hat wie $\Re Q(0)$, daß also der Vorfaktor $\sqrt{\Re Q(0)/\Re Q(z)}$ oberhalb von z_c einen Faktor i liefert, was mit der lokalen Analyse (81) konsistent ist. Zeige, daß bei ausreichender numerischer Auflösung die numerische und die WKB-Lösung tatsächlich übereinstimmen. Dies ist konsistent mit der Tatsache, daß in linearer Theorie die Welle praktisch vollständig absorbiert wird und daß keine Reflektion stattfindet.

Die Läufe 71 bis 74 (**Option 19**) sollen den Grenzübergang $\alpha \to 0$ verdeutlichen. Beachte, daß N jeweils so hoch zu wählen ist, daß Δz klein genug ist. Es sollte klar werden, daß für $\alpha \to 0$ der Impulsfluß außerhalb der kritischen Linie nahezu konstant wird, während im Bereich der kritischen Linie ein Sprung um den oben angegebenen Wert stattfindet.

7 Literaturhinweise

Die Motivation zu dem vorliegenden Praktikumsversuch stammt aus dem Kurs von Lindzen (1990), wo sich Kapitel 8, Kapitel 10 und der Anhang mit Schwerewellen beschäftigen. Es werden die Grundgleichungen sauber abgeleitet und die numerische Behandlung der Gleichungen beschrieben.

Hinweise zum Lösen der Gleichungen in speziellen Sonderfällen und zu deren Anwendung auf reale Phänomene in der Atmosphäre gibt es bei Gill (1980), speziell in den Kapiteln 6.5, 6.6, 8.8, 8.9 und 8.12.

Im Kapitel 14.3 des Lehrbuchs von Salby (1996) findet sich eine gute Diskussion zu den verschiedenen Typen von Wellen und wie diese durch Einschränkung der verwendeten Gleichungen eliminiert werden können.

Der (etwas fortgeschrittene) Artikel von Booker und Bretherton (1967) stellt die Grundlagen der Behandlung an kritischen Linien dar (Abschnitt 6.4 des vorliegenden Textes).

Literaturangaben

Booker, J. R. and F. P. Bretherton, 1967: The critical layer for internal gravity waves in a shear flow. *J. Fluid Mech.*, **27**, 513–539.

Gill, A. E., 1982: *Atmosphere–Ocean Dynamics*. Academic Press, New York, 662 pp.

Lindzen, R. S., 1990: *Dynamics in Atmospheric Physics*. Cambridge University Press, 310 pp.

Salby, M. L., 1996: *Fundamentals of Atmospheric Physics*. Academic Press, Volume 61 in the International Geophysics Series, 627 pp.